CLASE 6. MATRICES DIAGONALIZABLES

MATEMÁTICA I (B). 2° CUATRIMESTRE 2023

PROF. ARIEL SALORT

1. Diagonalización de matrices

Procedimiento para determinar si una matriz es diagonalizable en $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, y en caso de que lo sea, cómo armar las matrices C y D.

Dada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ o $\mathbb{C}^{n\times n}$

1º) Calculo el polinomio característico $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$.

2º) Calculo los ceros de $\chi_A(\lambda)$, que son los autovalores de A.

3º) Para cada λ encontrado calculo todas las soluciones de $(\lambda I - A)v = 0$. Obtengo así los autovectores asociados.

De estas soluciones me quedo con un conjunto de vectores $v \neq 0$ que *generan* todas las soluciones.

Ejemplo:
a) Si las soluciones de $\det(\lambda I - A)v = 0$ son $x(1,1,0)$, $x \in \mathbb{R}$, entonces me quedo por ejemplo con $v = (1,1,0)$.

b) Si las soluciones de $\det(\lambda I - A)v = 0$ son $y(1,1,0) + z(0,1,1)$, $y, z \in \mathbb{R}$, entonces me quedo por ejemplo con $v = (1,1,0)$ y con $v = (0,1,1)$.

4º) Cuando termine con lo anterior, me fijo si tengo tantos autovectores elegidos en el paso 3º) como filas o columnas de A (o sea, n)

Si no tengo n autovectores, esto me dice que A *no es diagonalizable*.

Si tengo n autovectores, esto me dice que A *sí es diagonalizable*, y sólo queda armar la matriz C de $n \times n$ poniendo los autovectores en las columnas de C.

Además, podemos armar D poniendo en la diagonal los autovalores de A (en el mismo orden que los autovectores asociados).

Si cuando terminé, $C, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$, puedo entonces decir que A *es diagonalizable en* $\mathbb{R}$, y entonces también lo será en $\mathbb{C}$.

Por el contrario, si $C, D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ pero $C, D \notin \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces puede decir que A *es diagonalizable en* $\mathbb{C}$ *pero no en* $\mathbb{R}$.

2. Casos posibles en una matriz de 2×2

¿Qué casos posibles tenemos para $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$?

1) Tenemos dos autovalores reales:

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - a)(\lambda - b)$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.
Puede ocurrir lo siguiente:
a) Si $a \neq b$, entonces tendremos que A es diagonalizable en $\mathbb{R}$. Es decir, vamos a encontrar u y v autovectores de a y v, respectivamente, y tendremos que

$$C = \begin{pmatrix} u_1 & | & v_1 \\ u_2 & | & v_2 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

b) Si $a = b$, si cuando resuelvo $(aI - A)x = 0$ encuentro dos vectores que generan todas las soluciones, entonces

$$C = \begin{pmatrix} u_1 & | & v_1 \\ u_2 & | & v_2 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Notar que en este caso

$$A = C.D.C^{-1} = C.aI.C^{-1} = a.C.I.C^{-1} = A.I = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Es decir, esto va a pasar solo si A ya era originalmente un múltiplo de la identidad (y entonces ya era diagonal).

c) Si $a = b$ y cuando resuelvo $(aI - \lambda)x = 0$ encuentro un solo vector que genera todas las soluciones, entonces A no va a ser diagonalizable.

2) Cuando tenemos autovalores complejos:

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - z)(\lambda - w)$$

con $z, w \in \mathbb{C}$.

Como $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, es este caso *siempre* tendremos que $w = \bar{z}$. Es decir, si $z = c + di$ con $d \neq 0$ es una raíz de $\chi_A(\lambda)$, entonces $\bar{z} = c - di$ será la otra raíz de $\chi_A(\lambda)$.

Además, si v es un autovector asociado a z, $\overline{v}$ será un autovector asociado al autovalor $\bar{z}$.

Entonces, en este caso siempre la matriz será diagonalizable en $\mathbb{C}$.

3. Casos posibles en una matriz de 3×3

1) Tenemos tres ceros reales diferentes

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - a)(\lambda - b)(\lambda - c)$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$ distintos.

En este caso siempre se van a encontrar v_a, v_b y v_c autovectores asociados a los autovalores a, b y c respectivamente, y tendremos la correspondiente matriz C con columnas dadas por v_a, v_b y v_c, y la matriz D será

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

y $A = C.D.C^{-1}$, con lo cual A *a a ser diagonalizable en* $\mathbb{R}$.

Observación: Esto pasa en general en dimensión mayor: si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y se tienen n autovalores reales diferentes, entonces A *será diagonalizable en* $\mathbb{R}$.

2) Tenemos un autovalor real repetido:

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - a)^2(\lambda - b)$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ distintos. Es decir, tenemos un autovalor repetido (con multiplicidad 2).

Cuando busquemos soluciones de $(bI - A)x = 0$ vamos a encontrar que el conjunto solución (es decir, los autovectores asociados al autovalor b son múltiplos de un cierto autovector que elegimos y llamaremos v_b.

Observación: Esto siempre pasa. Si un autovector es una raíz simple (sin multiplicidad) de $\chi_A(\lambda)$, entonces los autovectores asociados a ese autovalor vienen dados como los múltiplos de un solo autovector.

Cuando miremos las soluciones de $(aI - A)x = 0$, pueden pasar dos cosas:

i) que el conjunto solución se escriba como las combinaciones lineales de dos vectores (que no son uno múltiplo de otro), es decir, los autovectores asociados al autovalor a vienen dados por $(x, y, z) = \alpha u_a + \beta v_a$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, u_a, v_a autovectores asociados al autovalor a que no son múltiplos.

En este caso tendremos que A *es diagonalizable en* $\mathbb{R}$ y escribimos

$$C = \left(u_a | v_a | v_b\right), \qquad D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Recordar el mantener el orden de los autovectores y autovalores asociados.

ii) Que el conjunto solución se escriba como los múltiplos de un solo autovector v_a. En este caso tendremos que A *no es diagonalizable* ya que no me alcanzan los autovectores para aramar la matriz C de 3×3 (tenemos solo v_a y v_b como autovectores)

3) Tenemos 3 ceros reales repetidos:

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - a)^3$$

con $a \in \mathbb{R}$.

Acá puede pasar que al estudiar las soluciones de $(aI - A)x = 0$ tengamos:

i) Que las soluciones vienen dadas por los múltiplos de un solo autovector o por las combinaciones lineales de dos autovectores (que no son múltiplo). En ambos casos tendremos que A no es diagonalizable ya que no alcanzan los autovectores para armar la matriz C.

ii) Que las soluciones vienen dadas por las combinaciones lineales de 3 autovectores. Convencerse que si pasa esto, es porque A era diagonal y de hecho, $A = a.Id$.

4) Tenemos un autovalor real y dos complejos conjugados.

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - w)(\lambda - \bar{w})(\lambda - a)$$

con $a \in \mathbb{R}$, $w \in \mathbb{C}$, con $w \notin \mathbb{R}$.

Observación: Si $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tiene coeficientes en $\mathbb{R}$ y $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ es un autovalor de A, entonces $\bar{w}$ es también un autovalor de A.

En este caso tendremos que las soluciones de $(aI - A)x = 0$ nos da los múltiplos de un autovector v_a y las soluciones de $(wI - A)x = 0$ nos da los múltiplos de un autovector v_w. Además, sabemos que por ser A con coeficientes reales, $\overline{v_w}$ será un autovector de $\bar{w}$ y las soluciones de $(\bar{w}I - A)x = 0$ son múltiplos de $\overline{v_w}$

En resumen tenemos:

$$\text{autovalores} = \{a, w, \bar{w}\}$$

y podemos elegir para armar la matriz C

$$\text{autovectores} = \{v_a, v_w, \overline{v_w}\}.$$

Luego A será diagonalizable en $\mathbb{C}$ y no en $\mathbb{R}$.

Observación: Si $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ entonces $\chi_A(\lambda)$ es un polinomio de orden 3 que puede ocurrir:

a) tiene todos sus raíces reales: i) distintas, ii) una con multiplicidad y otra distinta, iii) una con multiplicidad triple

b) tiene una raíz real y dos complejas (no reales). En este caso, las raíces complejas son una conjugada de la otra.

4. Volviendo al ejemplo

Volvemos al ejemplo con el que empezamos de $J(t)$ y $A(t)$. Teníamos

$$\begin{pmatrix} J(t+1) \\ A(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 1{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J(t) \\ A(t) \end{pmatrix}$$

de donde habíamos visto que

$$\begin{pmatrix} J(t) \\ A(t) \end{pmatrix} = M^t \begin{pmatrix} J(0) \\ A(0) \end{pmatrix}.$$

Además, habíamos calculado en una clase anterior que

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$M^t = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^t & 0 \\ 0 & (\frac{1}{5})^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}.$$

Si queremos saber que les pasa a las poblaciones $J(t)$ y $A(t)$ cuando $t \to \infty$ para una cierta población inicial $\begin{pmatrix} J(0) \\ A(0) \end{pmatrix}$, podemos hacer $M^t \begin{pmatrix} J(0) \\ A(0) \end{pmatrix}$ y tomar límite

$$\lim_{t\to\infty} M^t \begin{pmatrix} J(0) \\ A(0) \end{pmatrix}$$

aunque más fácil va a ser hacer lo siguiente:

recordar que $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ es autovector de autovalor 1 de M, es decir

$$M\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

Entonces

$$M^2\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = M.M\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}.$$

Repitiendo esto, convencerse de que

$$M^t\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

Observación: en este caso, $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ es un *estado de equilibrio* ya que de una generación a otra siempre queda igual. No es el único equilibrio, cualquier múltiplo $\alpha(3,1)$ con $\alpha > 0$ lo será, y tendremos

$$\lim_{t\to\infty} M^t\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

Recordar también que $\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$ es autovector asociado al autovalor $\frac{1}{5}$, con lo cual

$$M\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix} = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$$

entonces

$$M^2\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix} = M.M\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{5}M\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix} = \tfrac{1}{5}\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix} = \left(\tfrac{1}{5}\right)^2\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}.$$

En general, convencerse de que

$$M^t\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix} = \left(\frac{1}{5}\right)^t\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$$

y que

$$\lim_{t\to\infty} M^t\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix} = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^t\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

¿Qué hacemos si ahora queremos calcular $\lim_{t\to\infty} M^t\begin{pmatrix}200\\120\end{pmatrix}$?

Escribimos a $\begin{pmatrix}200\\120\end{pmatrix}$ como combinación lineal de $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$ (que son los autovectores de M). Es decir, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ de manera que

$$\begin{pmatrix}200\\120\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}.$$

Es decir, tenemos el sistema de dos ecuaciones lineales

$$200 = 3\alpha - 5\beta, \qquad 120 = \alpha + \beta.$$

Resolviendo, $\alpha = 100$, $\beta = 20$. Entonces

$$\begin{pmatrix}200\\120\end{pmatrix} = 100\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + 20\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}.$$

Luego

$$\begin{aligned} M^t\begin{pmatrix}200\\120\end{pmatrix} &= M^t\left(100\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + 20\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}\right) \\ &= 100M^t\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + 20M^t\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix} \\ &= 100\cdot 1^t\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + \left(\frac{1}{5}\right)^t\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tomando límite:

$$\lim_{t\to\infty} M^t\begin{pmatrix}200\\80\end{pmatrix} = 100\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}300\\100\end{pmatrix}.$$

5. Estados de equilibrio y estabilidad

Definición: Dado un sistema $S(t+1) = AS(t)$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $S(t) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, decimos que un vector $v \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ es un *estado de equilibrio* del sistema si

a) $Av = v$ (v queda fijo por A)

b) v representa un estado posible del sistema (por ejemplo, si $S(t)$ es un vector de cantidades no negativas, v debe ser un vector donde cada coordenada sea mayor o igual a cero)

Observación: el vector $v = 0$, si es un posible estado del sistema, es un estado de equilibrio ya que $A0 = 0$ siempre.

Definición: diremos que 0 (el vector 0) es un *estado de equilibrio estable* del sistema $S(t+1) = AS(t)$ si para cualquier configuración inicial $S(0)$ se tiene que

$$\lim_{t\to\infty} S(t) = \lim_{t\to\infty} A^t S(0) = 0.$$

Observación: Si todos los autovalores de A tienen módulo menor que 1, entonces 0 es un equilibrio estable.