CLASE 5. AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

MATEMÁTICA I (B). 2° CUATRIMESTRE 2023

PROF. ARIEL SALORT

1. Matrices

Recordemos algunas cosas que vimos.

(1) Para lo que sigue, vamos a recordar la siguiente equivalencia. Dada $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ (o en general, $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$) para $n \geq 2$, son equivalentes:

- El sistema $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tiene solución no nula.
- $\det M = 0$
- M es no inversible
- El sistema $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ tiene infinitas soluciones o ninguna solución.
- $\operatorname{rg}(M) < 2$ (en general, si $\in \mathbb{C}^{n\times n}$, para $\operatorname{rg}(M) < n$).

Esto nos dice que al triangular se anula al menos una fila.

(2) Vimos también que, por ejemplo, si tenemos la matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ se tiene:

- multiplicar D por $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ da:
$$D\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
es decir, se duplica el tamaño de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y se lo deja en el mismo sentido, ya que $2 > 0$.
- multiplicar D por $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ da:
$$D\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
es decir, se triplicó el tamaño de $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y se lo dio vuelta, ya que $-3 < 0$.
- Tenemos entonces que $D\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es múltiplo de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $D\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es múltiplo de $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Autovalores y autovectores

Consideramos la matriz $A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 1{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

Buscamos vectores $v, w \in \mathbb{R}^2$ y números $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ que cumplan la función de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, y de los números 2 y -3.

Es decir, buscamos $v, w \in \mathbb{R}^2$ de manera que
$$Av = \lambda_1 v, \qquad Aw = \lambda_2 w$$
(o sea, Av es múltiplo de v y Aw es múltiplo de w). Tales vectores se llamarán *autovectores* de A y a los números λ_1, λ_2 se los llamará *autovalores* de A.

¿Cómo encuentro v, w in λ_1, λ_2?

Buscamos $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ no nulo y $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $Av = \lambda_1 v$, es decir,

$$A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Busquemos autovectores y autovalores de la matriz anterior. Planteamos

$$\begin{pmatrix} 0{,}5 & 1{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Esto es equivalente a que

$$\lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}5 & 1{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como tenemos que $\lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, podemos reescribir lo anterior como

$$\left[\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}5 & 1{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lo que es lo mismo, buscamos un vector $v \neq 0$ tal que

$$\begin{pmatrix} \lambda - 0{,}5 & -1{,}5 \\ -0{,}1 & \lambda - 0{,}7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esto es equivalente a que la matriz del sistema anterior sea no inversible, es decir, que tenga determinante nulo. Entonces

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 0{,}5 & -1{,}5 \\ -0{,}1 & \lambda - 0{,}7 \end{pmatrix} = (\lambda - 0{,}5)(\lambda - 0{,}7) - (1{,}5)(0{,}1) = 0$$

y buscamos λ que verifique la ecuación:

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda - 0{,}5)(\lambda - 0{,}7) - (1{,}5)(0{,}1) \\ &= \lambda^2 - \tfrac{6}{5}\lambda + \tfrac{1}{5}. \end{aligned}$$

Utilizando la resolvente obtenemos que

$$\lambda = 1, \qquad \lambda = \tfrac{1}{5}.$$

(a) Veamos que vector corresponde a $\lambda = 1$.

$$\begin{pmatrix} \lambda - 0{,}5 & -1{,}5 \\ -0{,}1 & \lambda - 0{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 0{,}5 & -1{,}5 \\ -0{,}1 & 1 - 0{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -1{,}5 \\ -0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

Por lo que el v buscado cumplirá

$$\begin{pmatrix} 0{,}5 & -1{,}5 \\ -0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para resolver, hacemos operaciones de fila: $F_2 \mapsto F_2 + \frac{1}{5}F_1$, dando

$$\begin{pmatrix} 0{,}5 & -1{,}5 \\ -0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0{,}5 & -1{,}5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{pmatrix} 0{,}5 & -1{,}5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esto da lo siguiente

$$0{,}5x - 1{,}5y = 0 \implies x = 3y.$$

Por lo tanto el conjunto de soluciones es

$$S_1 = \{(3y, y), y \in \mathbb{R}\}.$$

En particular $v = (3, 1)$ es una solución no nula y se tiene

$$A \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Decimos que v es un autovector de A asociado al autovalor 1.

(b) Veamos que vector corresponde a $\lambda = \frac{1}{5} = 0{,}2$.

$$\begin{pmatrix} \lambda - 0{,}5 & -1{,}5 \\ -0{,}1 & \lambda - 0{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 - 0{,}5 & -1{,}5 \\ -0{,}1 & 0{,}2 - 0{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}3 & -1{,}5 \\ -0{,}1 & -0{,}5 \end{pmatrix}$$

Por lo que el v buscado cumplirá

$$\begin{pmatrix} -0{,}3 & -1{,}5 \\ -0{,}1 & -0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para resolver, hacemos operaciones de fila: $F_2 \mapsto F_2 - \frac{1}{3}F_1$, dando

$$\begin{pmatrix} -0{,}3 & -1{,}5 \\ -0{,}1 & -0{,}5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -0{,}3 & -1{,}5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{pmatrix} -0{,}3 & -1{,}5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esto da lo siguiente

$$-0{,}3x - 1{,}5y = 0 \implies x = -5y.$$

Por lo tanto el conjunto de soluciones es

$$S_{\frac{1}{5}} = \{(-5y, y), y \in \mathbb{R}\}.$$

En particular $v = (-5, 1)$ es una solución no nula y se tiene

$$A \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Decimos que v es un autovector de A asociado al autovalor $\frac{1}{5}$.

Ahora podemos calcular fácilmente potencias de A

Podemos escribir ahora

$$A \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \left(A \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \left(1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \tfrac{1}{5} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

entonces, si llamamos

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

tenemos que

$$A.C = C.D$$

entonces

$$A = C.D.C^{-1}.$$

Con esta escritura de A es fácil calcular sus potencias

$$A^2 = A.A = (C.D.C^{-1}).(C.D.C^{-1}) = C.D^2.C^{-1}$$
$$A^3 = (C.D.C^{-1}).(C.D.C^{-1}).(C.D.C^{-1}) = C.D^3.C^{-1}.$$

En general, para $n \in \mathbb{N}$ tenedremos que

$$A^n = C.D^n.C^{-1}.$$

Volviendo al modelo

Si queremos saber cuantos individuos habrá en 4 períodos de tiempo si empezamos con $J(0) = 200$ y $A(0) = 100$, como teníamos

$$\begin{pmatrix} J(t) \\ A(t) \end{pmatrix} = A^t \begin{pmatrix} J(0) \\ A(0) \end{pmatrix}$$

tendremos que hacer

$$\begin{pmatrix} J(4) \\ A(4) \end{pmatrix} = A^4 \begin{pmatrix} J(0) \\ A(0) \end{pmatrix} = C.D^4.C^{-1} \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$$

con

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}, \qquad D^4 = \begin{pmatrix} 1^4 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{5})^4 \end{pmatrix}.$$

Finalmente obtenemos

$$\begin{pmatrix} J(4) \\ A(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 350{,}13 \\ 116{,}64 \end{pmatrix}.$$

3. Diagonalización de matrices

Definición: Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es *diagonalizable* en $\mathbb{R}$ si existen una matriz $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible y $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonal tales que

$$A = C.D.C^{-1}.$$

Una matriz es diagonalizable en $\mathbb{C}$ si las matrices C y D tienen coeficientes en $\mathbb{C}$.

Ejemplo: La matriz del ejemplo anterior es diagonalizable en $\mathbb{R}$.

Ejemplo: Veamos el procedimiento para determinar si una matriz es diagonalizable.

Dada $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ seguimos los siguientes pasos.

(1) Buscamos λ tal que

$$(\lambda I - A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tenga solución no nula. Esto equivale a que

$$\det(\lambda I - A) = 0.$$

Esto es

$$(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda+2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-5 & -5 \\ 0 & -4 & \lambda-6 \end{pmatrix}$$

y así

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda+2)((\lambda-5)(\lambda-6)-20) = (\lambda+2)(\lambda^2 - 11\lambda + 10) = 0.$$

A este polinomio se lo llama *polinomio característico* y se lo denota $\chi_A(\lambda)$. Tenemos que $\chi_A(\lambda) = 0$ si

$$\lambda = -2, \quad \lambda = 1, \quad \lambda = 10.$$

A estos números, ceros del polinomio característico los llamamos *autovalores* de A.

Busamos ahora los autovectores asociados a cada autovalor

Autovalor $\lambda = -2$.

Planteamos $-2I - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -5 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix}$ y triangulamos

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -5 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -4 & -8 \\ 0 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donde hemos realizado las operaciones: $F_1 \leftrightarrow F_3$, luego $F_1 \mapsto -\frac{1}{4}F_1$, y luego $F_2 \mapsto F_2 + 7F_1$.

Entonces $9z = 0$ y así $z = 0$, $-4y + 2z = 0$ de donde $y = -2z = 0$.

Las soluciones entonces son de la forma $(x, 0, 0)$ es decir $x(1, 0, 0)$ para $x \in \mathbb{R}$. Tomamos por ejemplo

$$v = (1, 0, 0).$$

El cual es el autovector asociado a $\lambda = -2$, es decir, cumple que

$$Av = -2v.$$

Autovalor $\lambda = 1$.

Planteamos $1I - A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ y triangulamos

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donde hemos realizado las operaciones: $F_3 \mapsto F_3 - F_2$.

Entonces $x = 0$ y así $x = 0$, $-4y - 5z = 0$ de donde $5z = -4y = 0$ y entonces $z = -\frac{4}{5}y$.

Las soluciones entonces son de la forma $(0, y, -\frac{4}{5}y)$ es decir $y(0, 1, -\frac{4}{5})$ para $y \in \mathbb{R}$. Tomamos por ejemplo

$$v = (0, 5, -4).$$

El cual es el autovector asociado a $\lambda = 1$, es decir, cumple que

$$Av = 1v.$$

Autovalor $\lambda = 10$.

Planteamos $10I - A = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$ y triangulamos

$$\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donde hemos realizado las operaciones: $F_3 \mapsto F_3 + \frac{4}{5}F_2$.

Entonces $12x = 0$ y así $x = 0$, $5y - 5z = 0$ de donde $y = z$.

Las soluciones entonces son de la forma $(0, y, y)$ es decir $y(0, 1, 1)$ para $y \in \mathbb{R}$. Tomamos por ejemplo

$$v = (0, 1, 1).$$

El cual es el autovector asociado a $\lambda = 10$, es decir, cumple que

$$Av = 10v.$$

(2) Juntando los datos obtenidos podemos construir C y D. La matriz C se obtiene poniendo como columnas los autovectores que calculamos: $(1, 0, 0)$ si $\lambda = 1$, $(0, 5, -4)$ si $\lambda = 1$, y $(0, 1, 1)$ si $\lambda = 10$. La matriz D es diagonal con los autovalores en la diagonal (en el orden anterior):

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

De esta manera tenemos que A se puede escribir como:

$$A = C.D.C^{-1}.$$

La inversa de C (ejercicio) se puede calcular como

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{5}{9}. \end{pmatrix}$$

En este caso, como A es una matriz de 3×3 y tiene 3 autovalores reales, tenemos que A es diagonalizable en $\mathbb{R}$ (y por lo tanto también en $\mathbb{C}$).

Resumimos las definiciones que introdujimos hasta ahora.

Definición: Dada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ decimos que λ es un *autovalor* de A si

$$\det(\lambda I - A) = 0.$$

Es decir, si λ es un cero (o raíz) del polonomio característico

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

(λ puede ser real o complejo).

Decimos que $v \in \mathbb{C}^n$ es un *autovector asociado al autovector* λ si v es una solución no nula de

$$(\lambda I - A)v = 0.$$

Es decir, $v \neq 0$ y satisface

$$Av = \lambda A.$$

Ejemplo: Consideramos $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. Calculemos sus autovalores y autovectores asociados.

Busamos λ y $v \neq 0$ tales que

$$(\lambda I - A)v = (\lambda I - A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vimos que para encontrar λ equivale a ver que $\det(\lambda I - A) = 0$.
Calculo:

$$(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 5 & -6 \\ 0 & 3 & \lambda - 4 \end{pmatrix}$$

y entonces

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda + 2)(\lambda^2 + \lambda - 2)$$

lo que da

$$\lambda = -2, \quad \lambda = 1, \quad \lambda = -2.$$

Entonces, tenemos solamente dos autovaslores, $\lambda = -2$, $\lambda = 1$.

Buscamos los autovectores.

Autovalor $\lambda = -2$.

Planteamos $-2I - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}$.
Entonces $3y - 6z = 0$ y así $y = 2z$.
Las soluciones entonces son de la forma

$$(x, 2z, z) = (x, 0, 0) + (0, 2z, z) = x(1, 0, 0) + z(0, 2, 1).$$

En este caso podemos elegir por ejemplo los autovectores

$$v = (1, 0, 0), \qquad v = (0, 2, 1)$$

ya que no son uno múltiplo del otro (son linealmente independientes). Nos servirán ambos para armar la matriz C. Es decir, ambos vectores cumple que

$$Av = -2v.$$

Autovalor $\lambda = 1$.

Planteamos $-2I - A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Entonces $3x = 0$ y así $x = 0$, y $y = z$.
Las soluciones entonces son de la forma

$$(0, z, z) = z(0, 1, 1).$$

En este caso podemos elegir por ejemplo

$$v = (0, 1, 1)$$

Es decir, v cumple que

$$Av = 1v.$$

Con esto tenemos entonces que

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

donde las dos primeras columnas de C corresponden a los dos autovectores correspondientes a $\lambda = -2$ y la última columna de C corresponde al autovector de $\lambda = 1$.

Finalmente, con esto escribimos

$$A = C.D.C^{-1}$$

con lo cual A es diagonalizable en $\mathbb{R}$ y por lo tanto en $\mathbb{C}$.

Ejemplo: Decidir si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ es diagonaliza en $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

Buscamos los autovalores de A:

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda + 2 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 2)^2.$$

Entonces $\chi_A(\lambda) = 0$ sí y sólo si $\lambda = 1, \lambda = -2$. Es decir, A tiene autovalores $\lambda = 1$ y $\lambda = -2$.

Calculamos los correspondientes autovectores.

Autovalor $\lambda = 1$.

Planteamos $1I - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Entonces $3y = 0$ y así $y = 0$, y $-y + 3z = 0$, lo que da $z = 0$.
Las soluciones son de la forma $(x, 0, 0) = x(1, 0, 0)$.
Elegimos entonces $v = (1, 0, 0)$ como autovector asociado a $\lambda = 1$.

Autovalor $\lambda = -2$.

Planteamos $-2I - A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces $3x = 0$ y así $x = 0$, y $-y = 0$, lo que da $y = 0$.
Las soluciones son de la forma $(0, 0, z) = z(0, 0, 1)$.
Entonces elegimos $v = (0, 0, 1)$ como el autovector asociado a $\lambda = -2$.

¿Cómo armamos la matriz $C \in \mathbb{R}^{3\times3}$ que tiene que ser con autovectores en sus columnas y que sea inversible?

No se puede. No alcanzan los autovectores. Esto nos dice que A no es diagonalizable en $\mathbb{R}$ (y por lo tanto tampoco en $\mathbb{C}$).

Ejemplo: Decidir si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. es diagonalizable en $\mathbb{R}$ ó en $\mathbb{C}$.

Buscamos los autovalores de A:

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$$

Entonces $\chi_A(\lambda) = 0$ sí y sólo si $\lambda = \pm i$. Es decir, A tiene autovalores $\lambda = i$ y $\lambda = -i$.

Calculamos los correspondientes autovectores.

Autovalor $\lambda = i$.

Planteamos $iI - A = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
donde hemos realizado las operaciones $F_1 \leftrightarrow F_2$ y luego $F_2 \mapsto F_2 - iF_1$.
Entonces $x + iy = 0$ y así $x = -iy$.
Las soluciones son de la forma $(-iy, y) = y(-i, 1)$. Elegimos entonces $v = (-i, 1)$ como autovector asociado a $\lambda = i$.

Autovalor $\lambda = -i$.

De manera similar obtenemos que se puede elegir $v = (i, 1)$ como autovector asociado a $\lambda = -i$.

Podemos entonces construir las matrices C y D:

$$C = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

y se calcula

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

de donde podemos escirbir $A = C.D.C^{-1}$.

Con esto podemos afirmar que A no es diagonalizable en $\mathbb{R}$ pero sí es diagonalizable en $\mathbb{C}$ ya que $C.D \in \mathbb{C}^{2\times2}$ pero $C.D \notin \mathbb{R}^{2\times2}$.