CLASE 4. SISTEMAS LINEALES

MATEMÁTICA I (B). 2° CUATRIMESTRE 2023

PROF. ARIEL SALORT

1. Matrices

En la clase anterior introdujimos sistemas de ecuaciones que podían ser expresados de manera matricial. Dos cuestiones importantes que planteamos a la hora de resolverlos fueron

- calcular potencias de una matriz
- calcular la inversa de una matriz.

Definición: Una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es una matriz con m filas y n columnas con coeficientes en $\mathbb{R}$.

Una matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ es una matriz con m filas y n columnas con coeficientes en $\mathbb{C}$.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 3 \\ -1 & 0 & \pi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1+i & \sqrt{2} \\ -4 & i \\ 2i & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 2}.$$

2. Sistemas lineales (en $\mathbb{C}$)

Un ejemplo de sistema de dos ecuaciones lineales con coeficientes en $\mathbb{C}$ es por ejemplo

$$\begin{cases} x - 2y & = 0 \\ ix - (1+i)y & = -1-i. \end{cases}$$

Este ejemplo corresponde a un sistema lineal de dos ecuaciones y dos incógnitas. Matricialmente lo podemos escribirlo como

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ i & -(1+i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1-i \end{pmatrix}.$$

En general, un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas tiene la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n & = b_2 \\ \qquad \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n & = b_m, \end{cases} \tag{2.1}$$

con $a_{jk} \in \mathbb{C}$ con $1 \le j \le m$, $1 \le k \le n$ y $b_j \in \mathbb{C}$ con $1 \le j \le m$.

Los valores $x_1, \dots x_n$ son las *incógnitas.*

Un vector $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ es una *solución* del sistema (2.1) si $(x_1, \dots, x_n)$ satisface cada una de las m ecuaciones.

Matricialmente, el sistema (2.1) se puede escribir como:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A\in\mathbb{C}^{m\times n}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x\in\mathbb{C}^{n\times 1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{b\in\mathbb{C}^{m\times 1}},$$

es decir,

$$Ax = b.$$

Enunciamos algunos términos que se usarán en este contexto.

Definición:

- El sistema (2.1) es *homogéneo* si $(b_1, \ldots, b_m) = (0, \ldots, 0)$.
- Dado un sistema como (2.1), se llama *sistema homogéneo asociado a* (2.1) al que tiene los mismos coeficientes a_{ij} pero reemplazando a los $b_1, \ldots b_m$ por 0, es decir, el sistema $Ax = 0$.

  Por ejemplo, el sistema
$$\begin{cases} x - 2y & = 0 \\ ix - (1+i)y & = -1 - i \end{cases}$$
  tiene como sistema homogéneo asociado a
$$\begin{cases} x - 2y & = 0 \\ ix - (1+i)y & = 0. \end{cases}$$
- Dado un sistema lineal $Ax = b$ con $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{C}^{m\times 1}$, puede ocurrir lo siguiente:
  (i) si el sistema no tiene solución, se dice que es *incompatible* (S.I.)
  (ii) si el sistema tiene solución única, se dice que es *compatible determinado* (S.C.D.)
  (iii) si el sistema tiene infinitas soluciones, se dice que es *compatible indeterminado* (S.C.I.)
- Un sistema homogéneo siempre tiene a $x = 0$ (vector nulo) como solución.

Ejemplo: Resolvamos el sistema homogéneo anterior
$$\begin{cases} x - 2y & = 0 \\ ix - (1+i)y & = -1 - i. \end{cases}$$
Para ello haremos operaciones de fila a la *matriz ampliada*
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & | & 0 \\ i & -1-i & | & -1-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & i-1 & | & -1-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & i \end{pmatrix}$$
donde primero realizamos la operación:
$$F_2 \mapsto F_2 - iF_1$$
es decir, $-1 - i + 2i = i - 1$.

Luego hemos realizado la operación
$$F_2 \mapsto \frac{\overline{i-1}}{|i-1|^2} F_2$$
(observar que $\frac{\overline{i-1}}{|i-1|^2}$ es el inverso de $i - 1$), es decir, $(-1-i)(\frac{-1-i}{2}) = \frac{i+1+i^2+i}{2} = \frac{2i}{2} = i$.

Nos queda el sistema
$$\begin{cases} x - 2y & = 0 \\ y & = i. \end{cases}$$
De este nuevo sistema equivalente se ve fácil que la solución es
$$y = i, \qquad x = 2y = 2i.$$
Luego, obtuvimos que el sistema tiene solución única dada por $(x, y) = (2i, i)$.

2.1. Operaciones elementales. Recordemos qué operaciones elementales no mofidican el conjunto de soluciones del sistema. Si $A = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix}$ con $F_1, \ldots F_m$ las filas de la matriz A:

- Intercambiar filas: $F_i \leftrightarrow F_j$.
- Multiplicar una fila por un múltiplo $k \neq 0$: $F_i \mapsto kF_i$ con $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- Reemplazar una fila por la suma de esa fila y un múltiplo de otra: $F_i \mapsto F_i + kF_j$ con $k \in \mathbb{C}$.

2.2. Rango.

Definición: Definimos el *rango* de una matriz como sigue:

rg(A) = cantidad de filas que no se anulan de la matriz escalonada que queda luego de hacer la eliminación de Gauss

Ejemplo:

(i)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & -i \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rg}(A) = 1.$$

Esto nos dice que el sistema homogéneo $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es S.C.I. (tiene infinitas soluciones).

(ii) Para la misma matriz A consideramos el sistema no homogéneo
$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz ampliada es
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ i & -i & 0 \end{array}\right)$$

y vemos que tiene rango 2.

Esto nos dice que el sistema no homogéneo no tiene soluciones, es S.I.

(iii) Para la misma matriz A miramos ahora
$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \end{pmatrix}.$$

La matriz ampliada es
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ i & -i & 2i \end{array}\right)$$

tiene rango 1.

Esto nos dice que el sistema no homogéneo tiene infinitas soluciones (S.C.I.)

(iv)
$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rg}(B) = 2.$$

Esto nos dice que el sistema homogéneo $B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tiene una única solución.

(v) Para la misma matriz B consideramos el sistema no homogéneo
$$B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La matriz ampliada es
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ i & i & 2 \end{array}\right)$$

y vemos que tiene rango 2. De hecho, convencerse que el rango de la matriz ampliada $(B|b)$ será siempre 2 sin importar quien sea b.

Esto nos dice que el sistema no homogéneo tiene una única solución.

En general vale el siguiente resultado: si $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ (m ecuaciones con n incógnitas), al estudiar las soluciones del sistema
$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

- si rg$(A) = n$ entonces rg$(A|b) = n$ para cualquier b y se tiene que es un S.C.D. (hay una única solución).

- si $\operatorname{rg}(A) < n$ y $\operatorname{rg}(A|b) = \operatorname{rg}(A)$ entonces se tiene que es un S.C.I. (hay infinitas soluciones).
- si $\operatorname{rg}(A) < n$ y $\operatorname{rg}(A|b) > \operatorname{rg}(A)$ entonces se tiene que es un S.I. (no hay solución).

3. Matriz inversa

En el caso de tener una matriz cuadrada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ decimos que A es *inversible* si existe otra matriz $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que verifique $AB = BA = Id_{n\times n}$. En este caso, la matriz B es única y se la llama A^{-1}.

Se tiene lo siguiente:

El sistema $Ax = b$ tiene única solución para todo $b \in \mathbb{C}^m$ sí y sólo si A es inversible y en ese caso la solución está dada por $x = A^{-1}b$.

Esto nos dice además que si A no es inversible, entonces el sistema $Ax = b$ tiene infinitas soluciones o ninguna solución.

Por último, vale lo siguiente:

$$A \in \mathbb{C}^{n\times n} \text{ es inversible } \iff \det(A) \neq 0.$$

Ejemplo: Volvamos al ejemplo anterior que resolvimos mediante operaciones de filas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ i & -1-i \end{pmatrix}.$$

¿Cómo encontramos A^{-1}?

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & | & 1 & 0 \\ i & -1-i & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & | & 1 & 0 \\ 0 & i-1 & | & -i & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & \frac{-1+i}{2} & \frac{-1-i}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & i & -1-i \\ 0 & 1 & | & \frac{-1+i}{2} & \frac{-1-i}{2} \end{pmatrix}$$

donde primero realizamos

$$F_2 \mapsto F_2 - iF_1$$

es decir, $-1 - i + 2i = i - 1$. Luego realizamos

$$F_2 \mapsto \tfrac{-i-1}{2} F_2,$$

Finalmente, realizamos

$$F_1 \mapsto F_1 + 2F_2.$$

Llegados a la matriz identidad a la izquierda, lo que queda a la derecha es A^{-1}, en este caso

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} i & -1-i \\ \frac{-i+i}{2} & \frac{-1-i}{2} \end{pmatrix}.$$

Verificamos que efectivamente

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ i & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -1-i \\ \frac{-i+i}{2} & \frac{-1-i}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vemos además que la solución de

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1-i \end{pmatrix}$$

es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -1-i \\ \frac{-i+i}{2} & \frac{-1-i}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i \\ i \end{pmatrix}$$

como ya habíamos calculado antes.

4. Diagonalización

4.1. Matrices diagonales. Decimos que una matriz $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es diagonal si $d_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$.

Ejemplo:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \text{ es diagonal.}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} \text{ es diagonal.}$$

Respondamos algunas cuestiones relacionadas con matrices diagonales.

¿Cómo son las potencias de una matriz diagonal?

$$D^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & (-3)^2 \end{pmatrix}$$

En general, si $n \in \mathbb{N}$

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$$

¿Cómo se calcula la inversa de una matriz diagonal?

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

ya que

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

¿Qué hace D a un vector cualquiera $(x, y) \in \mathbb{R}^2$?

En la figura (1) vemos gráficamente que

$$D\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si tomamos $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ cualquiera, lo podemos pensar como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En este caso se dice que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ es combinación lineal de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Entonces

$$D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = D\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = xD\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + yD\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 2x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-3)y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, dado $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, D estira el x al doble (lo multiplica por 2) y estira al y el triple y lo da vuelta (lo multiplica por -3).

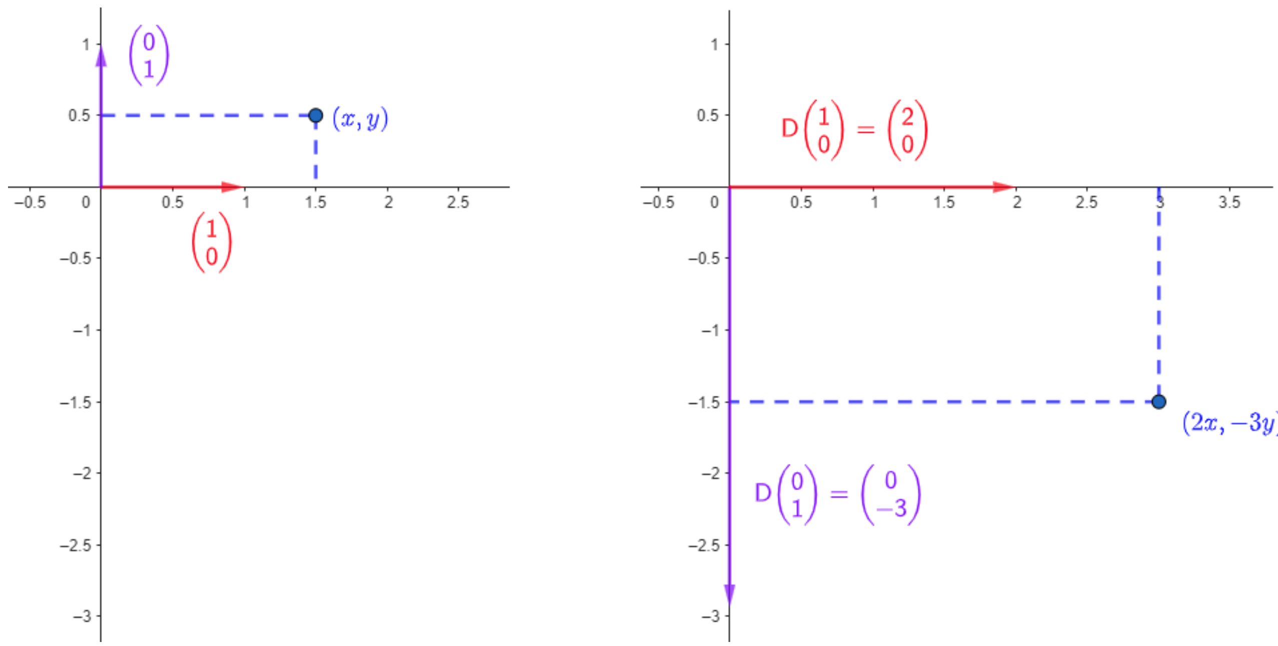

FIGURA 1. Acción de D sobre un vector.

¿Cómo se calcula el determinante de una matriz diagonal D?

$$\det D = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = -6.$$

En general, si $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

entonces, para $k \in \mathbb{N}$

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

y

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & \lambda_n^{-1}. \end{pmatrix}$$

Es fácil interpretar geométricamente $D\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

En el caso de matrices diagonales es inmediato calcular el determinante:

$$\det D = \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$