CLASE 3. SISTEMAS DE ECUACIONES

MATEMÁTICA I (B). 2° CUATRIMESTRE 2023

PROF. ARIEL SALORT

1. Introducción a los modelos

Comenzaremos con un modelo sencillo para describir el tamaño de una población a lo largo del tiempo. Llamamos

$$N(t) = \text{ cantidad de individios en el tiempo } t.$$

Supongamos que la población se duplica de un período a otro. Esto quiere decir que si en el año t hay $N(t)$ individuos, en el año $t+1$ habrá $2N(t)$ individuos, es decir,

$$N(t+1) = 2N(t).$$

Si la población inicial es de $N_0 := N(0) = 100$ individuos, entonces

$$\begin{aligned} N(1) &= 2N_0 = 200 \\ N(2) &= 2N(1) = 2^2N_0 = 400 \\ N(3) &= 2N(2) = 2^2N(1) = 2^3N_0 = 800. \end{aligned}$$

Luego de t unidades de tiempo tendremos entonces que

$$N(t) = 2N(t-1) = 2^2N(t-2) = 2^3N(t-3) = \cdots = 2^tN_0.$$

Esto nos está diciendo que la población crece indefinidamente

Si la población hubiera dismunuido a la mitad en cada año, de manera similar tendríamos que

$$N(t) = \tfrac{1}{2}N(t-1) = (\tfrac{1}{2})^2N(t-2) = (\tfrac{1}{2})^3N(t-3) = \cdots = (\tfrac{1}{2})^tN_0,$$

y nos diría que la población tiende a desaparecer

En general, si la tasa de crecimiento de un período a otro es $r > 0$, tendremos que

$$N(t) = r^tN_0.$$

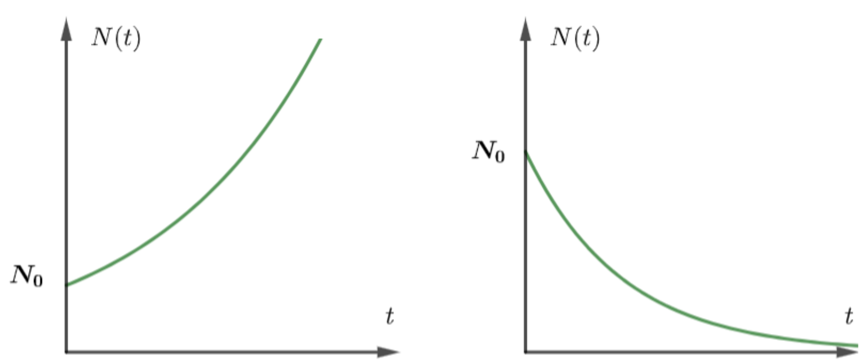

Figura 1. Población con $r > 1$ (izquierda) y con $0 < r < 1$ (derecha)

Para pensar: qué ocurre con la población cuando $0 < r < 1$, cuando $r = 1$ y cuando $r > 1$?

Algunas preguntas : Si por ejemplo tenemos el modelo

$$N(t+1) = 2N(t)$$

y sabemos que en el año 2 había 8 individuos

(a) ¿Cuántos individuos habrá en 5 años?
(b) ¿Cuantos había dos años antes?

2. Modelos matriciales

El modelo de población mencionado anteriormente es de los mas sencillos ya que no tiene en consideración la edad reproductiva de los individuos.

Consideramos ahora un modelo un poco más general que tiene en cuanta una estructura por edades de la población. Para simplificar, consideramos

$$\begin{aligned} J(t) &= \text{población jóven en el tiempo } t \\ A(t) &= \text{población adulta en edad reproductiva en el tiempo } t. \end{aligned}$$

¿Cómo se relacionan estos dos grupos?

Suponemos que un 20 % de la población jóven se convierte en adulta de un período de tiempo al siguiente, y que un 70 % de la población adulta permanece viva en el período siguiente. Esto lo podemos escribir como sigue:

$$A(t+1) = 0{,}2J(t) + 0{,}7A(t).$$

Además, supongamos que el promedio de hijos que sobrevive de un año al siguiente es de 1.5 por adulto, y que un 50 % de la población joven permanece joven (y viva) de un tiempo al siguiente. Lo podemos escribir como sigue:

$$J(t+1) = 0{,}5J(t) + 1{,}5A(t).$$

Las dos expresiones anteriores pueden ser escritas matricialmente como

$$\begin{pmatrix} J(t+1) \\ A(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 1{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J(t) \\ A(t) \end{pmatrix}$$

Si por ejemplo $J(0) = 200$ y $A(0) = 100$, al año, cúantos individuos de cada clase habrá?

$$\begin{pmatrix} J(1) \\ A(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 1{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100+150 \\ 40+70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 110 \end{pmatrix}$$

Y en dos años?

$$\begin{pmatrix} J(2) \\ A(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 1{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 250 \\ 110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125+165 \\ 50+77 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 290 \\ 127 \end{pmatrix}$$

Si llamamos $R = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 1{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$, lo anterior podemos escribirlo como

$$\begin{pmatrix} J(1) \\ A(1) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} J(0) \\ A(0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} J(2) \\ A(2) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} J(1) \\ A(1) \end{pmatrix} = R^2 \begin{pmatrix} J(0) \\ A(0) \end{pmatrix}$$

En general obtenemos que

$$\begin{pmatrix} J(t) \\ A(t) \end{pmatrix} = R^t \begin{pmatrix} J(0) \\ A(0) \end{pmatrix}$$

Para realizar estos cálculos necesitamos entender como calcular *potencias de matrices*.

Por otro lado, si sabemos que en el año 2 había 180 jóvenes y 90 adultos, ¿puedo saber cuántos había de cada grupo al año anterior? En este caso planteamos

$$J(2) = 55, \quad A(2) = 24,$$

y sabemos que

$$\begin{pmatrix} J(2) \\ A(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 \\ 24 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} J(1) \\ A(1) \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} J(1) \\ A(1) \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} 55 \\ 24 \end{pmatrix}.$$

Para esto, necesitaremos *invertir la matriz R*.