CLASE 1. NÚMEROS COMPLEJOS

MATEMÁTICA I (B). 2° CUATRIMESTRE 2023

PROF. ARIEL SALORT

1. Los números complejos

1.1. Tipos de números. A la hora de hacer cálculos utilizamos diferentes “tipos”de números.

- $\mathbb{N}$ números naturales: 1,2,3, etc.
- $\mathbb{Z}$ números enteros: -5, 0, 11, etc.
- $\mathbb{Q}$ números racionales: $-\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 3 etc.
- $\mathbb{R}$ números reales: -1.1, 2, π, $\sqrt{2}$, etc.

Se tienen las siguientes inclusiones

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

1.2. Los números complejos. Este tipo de números surge de la necesidad de resolver algunas ecuaciones. Si se tiene la ecuación

- $x + 3 = 0$ puedo resolverla en $\mathbb{Z}$,
- $2x + 1 = 0$ puedo resolverla en $\mathbb{Q}$,
- $x^2 = 2$ puedo resolverla en $\mathbb{R}$,
- $x^2 = -1$ no puedo resolver en $\mathbb{R}$ ya que no existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 = -1$.

Es por eso que definimos i como una de las soluciones de la ecuación $x^2 + 1 = 0$, es decir, la *unidad imaginaria* i se define de manera que

$$i^2 = -1.$$

Agregaremos este *número* i a los números reales para extenderlos, y poder resolver ecuaciones que antes no se podían.

Definición: el conjunto de los *números complejos* se denota por $\mathbb{C}$ y está dado por

$$\mathbb{C} = \{a + bi \text{ tal que } a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}.$$

Ejemplo:

- $2 + 3i$ donde $a = 2$, $b = 3$
- $-1 + i$ donde $a = -1$, $b = 1$
- $2i$ donde $a = 0$, $b = 2$
- i donde $a = 0$, $b = 1$
- 5 donde $a = 5$, $b = 0$

De la definición anterior se tiene que los números reales son un subconjunto de los números complejos:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

ya que a cualquier número $a \in \mathbb{R}$ se lo puede escribir como

$$a = a + 0i.$$

Definición: A la forma de representar los números complejos como $a + bi$ se la llama *forma binómica.*

Definición: Dado un número complejo z en forma binómica, esto es, $z = a + bi$, al número real a lo llamamos *parte real* de z y al número real b lo llamamos *parte imaginaria* de z. Utilizamos la notación

$$a = \mathrm{Re}(z), \qquad b = \mathrm{Im}(z)$$

Ejemplo: Si $z = 2 - 3i$, entonces
$$\mathrm{Re}(z) = 2, \qquad \mathrm{Im}(z) = -3.$$

Observación:

- Un número complejo z es un número real sí y sólo si $\mathrm{Im}(z) = 0$, por ejemplo $z = 2$.
- Se dice que un número complejo es *imaginario puro* si $\mathrm{Re}(z) = 0$, por ejemplo $z = 2i$.
- Un número complejo $z = a + bi$ es el 0 sí y sólo si $a = \mathrm{Re}(z) = 0$ y $b = \mathrm{Im}(z) = 0$.

1.3. Operaciones entre números complejos.

Veamos como sumar dos números complejos.

Ejemplo:
$$(2 + 3i) + (5 - 2i) = (2 + 5) + (3 - 2)i = 7 + 1i = 7 + i.$$

Definición: La *suma de números complejos* se define como sigue:
$$(a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i.$$

Observación:

- El *elemento neutro* para la suma es $0 + 0i = 0$.
- El *opuesto* de $a + ib$ es $-a - bi$ ya que $(a + ib) + (-a - ib) = 0$.

Veamos como multiplicar dos números complejos. Para ello usamos la propiedad distributiva.
$$\begin{aligned}(2 + 3i).(5 - 2i) &= 2{,}5 + 2.(-2i) + 3i{,}5 + 3i.(-2i)\\ &= 10 - 4i + 15i - 6i^2\\ &= 10 - 4i + 15i - 6(-1)\\ &= 10 - 4i + 15i + 6\\ &= 16 + 11i.\end{aligned}$$

Definición: Definimos el *producto de números complejos* como sigue:
$$(a + bi) + (c + di) = (ac - db) + (bc + ad)i.$$

Ejercicio: Calcular i^2, i^3, i^4, i^5, etc. ¿Hay una manera rápida de saber cuánto es i^{123}?

Observación:

- El *elemento neutro* para el producto es $1 + 0i = 1$.
- El *elemento inverso* de $z \in \mathbb{C}$ para el producto, es el número complejo z^{-1} elegido de manera que $z.z^{-1} = 1$. ¿Cómo encontramos tal número z^{-1}? Lo veremos en breve. Por ahora sabemos que por ejemplo,
$$i.(-i) = -i^2 = -(-1) = 1.$$
Consecuentemente $-i$ es el inverso de i, es decir, si $z = i$, entonces $z^{-1} = -i$.
- Al igual que ocurre en $\mathbb{R}$, la suma y la multiplicación de números complejos es asociativa, conmutativa, y vale la propiedad distributiva.

1.4. Volviendo a las ecuaciones. Volviendo a la cuestión que nos motivó a definir los números complejos, ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $z^2 = -1$? En los números reales sabemos que ninguna. Veamos que ocurre en $\mathbb{C}$. Buscamos $z = a + bi$ tal que

$$(a + bi)^2 = -1.$$

Por definición, esto equivale a que

$$(a + bi).(a + bi) = -1 \implies a^2 + 2abi^2 - b^2 = -1.$$

Reescribiendo la igualdad tenemos que

$$(a^2 - b^2 + 1) + 2abi = 0 \iff a^2 + b^2 + 1 = 0 \quad \text{y} \quad 2ab = 0.$$

La segunda igualdad nos dice que $a = 0$ o $b = 0$. Si $a = 0$, la primera ecuación nos dice que

$$b^2 = 1 \text{ con } b \in \mathbb{R} \implies |b| = 1 \implies b = \pm 1.$$

Esto da que $z = 0 \pm i$, es decir $z = i$ ó $z = -i$.

Si $b = 0$, la primera ecuación nos dice que

$$a^2 = -1 \text{ con } a \in \mathbb{R},$$

lo cual sabemos que no tiene solución. Luego, las únicas soluciones de $z^2 = -1$ son $z = i$ y $z = -i$.

Mas generalmente, si queremos resolver $z^2 = -5$, utilizaremos lo que obtivimos recién para ver que esa ecuación tiene dos soluiciones dadas por $z = \sqrt{5}i$ y $z = -\sqrt{5}i$. Esto es cierto ya que

$$(\pm\sqrt{5}i)^2 = (\sqrt{5})^2 i^2 = -5.$$

En general: la ecuación $z^2 = -\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$, tiene soluciones $z = \pm\sqrt{\alpha}i$ (comprobarlo!).

Más generalmente, si se quiere resolver la ecuación $z^2 + 2z + 2 = 0$, procedemos como sigue. Recordar que la fórmula resolvente de la ecuación cuadrática en $\mathbb{R}$ para $ax^2 + bx + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ está dada por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

y nos da las soluciones reales de la ecuación siempre que $b^2 - 4ac \geq 0$.

Si buscamos ahora soluciones (que incluyan a las soluciones complejas) de la ecuación $az^2 + bz + c = 0$, tenemos una "versión compleja"de la resolvente que nos dice que:

$$z = \frac{-b + w}{2a} \quad \text{donde } w \in \mathbb{C} \text{ es tal que } w^2 = b^2 - 4ac.$$

En el ejemplo particular que estamos considerando $a = 1$, $b = 2$, $c = 2$ por lo que

$$w^2 = 2^2 - 8 = -4 \implies w = \sqrt{4}\sqrt{-1} = \pm 2i \implies w = 2i \text{ ó } w = -2i.$$

Entonces las soluciones de $z^2 + 2z + 2 = 0$ serán

$$z = \frac{-2 + 2i}{2} = -1 + i, \qquad z = \frac{-2 - 2i}{2} = -1 - i.$$

En resumen: Para resolver la ecuación $az^2 + bz + c = 0$ en $\mathbb{C}$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$, hacemos lo siguiente.

- Si $b^2 - 4ac \geq 0$, tenemos dos soluciones reales dadas por

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Si $b^2 - 4ac < 0$, tenemos dos soluciones complejas conjugadas dadas por

$$z = \frac{-b \pm i\sqrt{-(b^2 - 4ac)}}{2a}.$$

1.5. Representación gráfica de los números complejos. Los números complejos se representan como elementos del plano. Identificamos $z = a + bi \in \mathbb{C}$ con $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Sobre el eje $\mathrm{Re}(z)$ están los números reales $a + 0i = a \in \mathbb{R}$.
Sobre el eje $\mathrm{Im}(z)$ están los números complejos puros, es decir, los de la forma $0 + ib = ib$ con $b \in \mathbb{R}$.

Ejemplo: En la figura 2 interpretamos gráficamente la suma de los números complejos

$$(1 + 3i) + (2 - i) = 3 + 2i$$

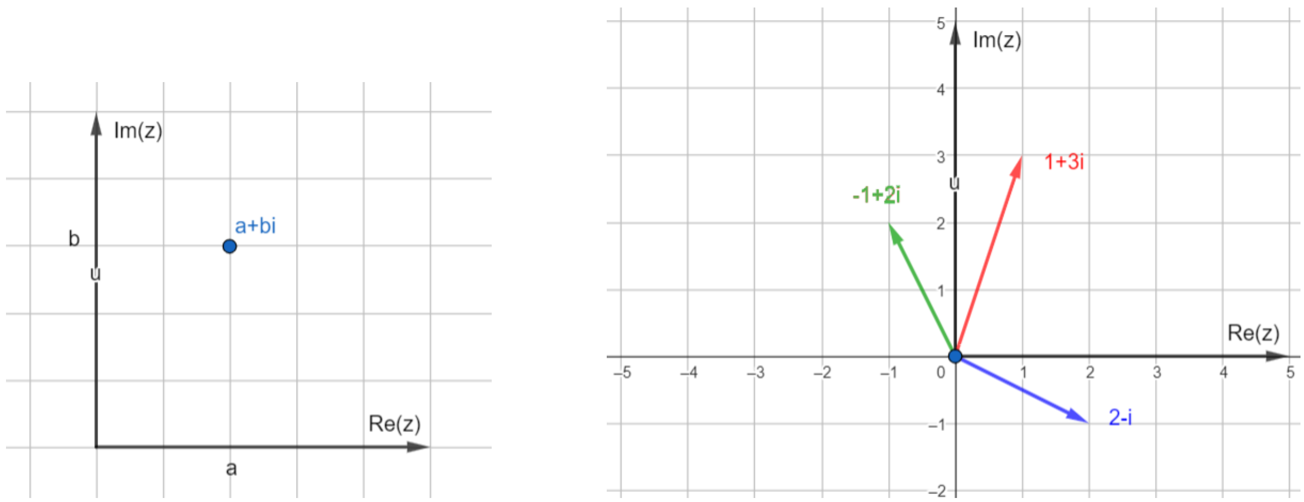

Figura 1. Representación de un número complejo.

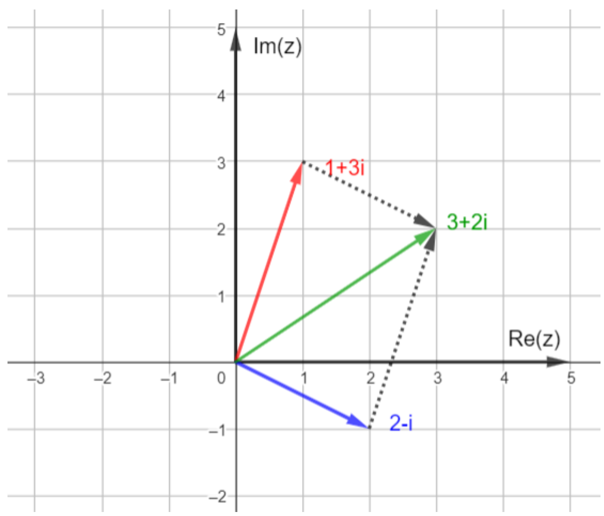

Figura 2. Suma de números complejos.

1.6. Módulo. Se define el módulo de z como su distancia al origen, y se lo denota $|z|$.

Definición: Dado $z = a + ib \in \mathbb{C}$ se define

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Observación:

- $\operatorname{dist}(a + ib, 0) = \operatorname{dist}((a, b), (0, 0)) = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Siempre tenemos que $|z| \in \mathbb{R}$ y $|z| \geq 0$.

Ejemplo:

- $z = 2 + i \implies |z| = |2 + i| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.
- $z = 2 - i \implies |z| = |2 - i| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$.
- $z = -1 + 2i \implies |z| = |-1 + 2i| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.
- $z = 2 \implies |z| = |2| = 2$.
- $z = -2 \implies |z| = |-2| = 2$.

Propiedades del módulo:

Dados $z, w \in \mathbb{C}$ vale lo siguiente.

(1) Se tiene que
$$|z| = 0 \iff z = 0.$$
Esto es porque si $z = a + ib$ cumple $|z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2} = 0$, esto solo es posible si $a^2 + b^2 = 0$, es decir, $a = b = 0$ (es decir, $z = 0$).

(2) Se tiene que
$$|z.w| = |z|.|w|.$$
Para ver la validez de esta identidad, escribimos $z = a + ib$, $w = a + id$ y planteamos la igualdad (ejercicio).

Ejemplo:
$$|(1 + 2i)(1 - 2i)| = |1 + 2i||1 - 2i| = \sqrt{5}^2 = 5$$

(3) Se tiene que para cualquier $n \in \mathbb{N}$
$$|z^n| = |z|^n.$$
Esta propiedad es una consecuencia de la propiedad (2). (por qué?)

Ejemplo:
$$|(1 + 2i)^6| = |1 + 2i|^6 = (\sqrt(5))^6 = 125.$$
Observar que no tuvimos que calcular $(1 + 2i)^6$ para calcular su múdulo, lo cual es bastante cuentoso.

1.7. Conjugado. Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$ se define el *conjugado* de z y se denota como $\bar{z}$ al número complejo $\bar{z} = a - ib$.

Geométricamente, es el reflejado respecto al eje real.

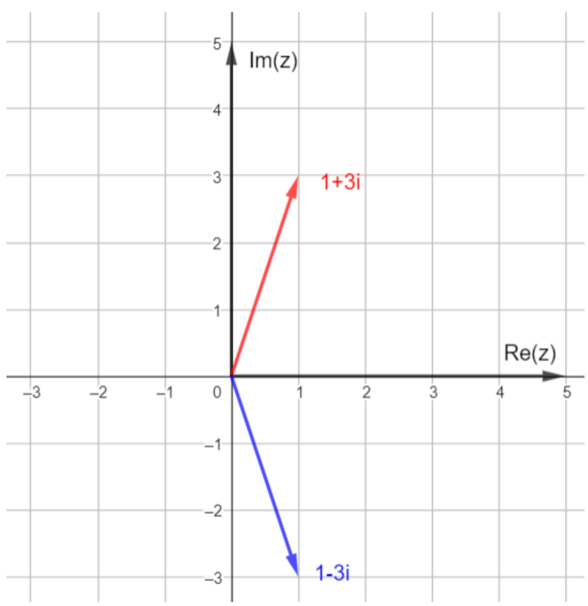

Figura 3. Conjugado de un número complejo.

Ejemplo:

- $z = 2 + i \implies \bar{z} = 2 - i$
- $z = 3 - 2i \implies \bar{z} = 3 + 2i$

Veamos que ocurre si multiplicamos un número complejo por su conjugado.

Si $z = 3 - 2i$ entonces $\bar{z} = 3 + 2i$. Entonces

$$z\bar{z} = (3 - 2i)(3 + 2i) = 9 + 6i - 6i + 4 = 13.$$

Por otro lado,

$$|z|^2 = |3 - 2i|^2 = 3^2 + 2^2 = 13.$$

Es coincidencia? No. En general se tiene que, si $z = a + ib$, entonces

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

Esta es una propiedad muy útil, ya que por ejemplo, nos permite calcular el inverso de un número complejo.

Ejemplo: Si $z = 3 - 2i$, entonces vimos que

$$z\bar{z} = (3 - 2i)(3 + 2i) = |z|^2 = 13.$$

Esto implica que

$$z\frac{\bar{z}}{|z|^2} = (3 - 2i)\frac{3 + 2i}{13} = (3 - 2i)(\frac{3}{13} + \frac{2}{13}i) = 1.$$

Recordar que el inverso de $z \in \mathbb{C}$ dijimos que es el númetro complejo $z^{-1} \in \mathbb{C}$ tal que $zz^{-1} = 1$. De lo anterior sigue entonces que

$$z = 3 - 2i \quad \Longrightarrow \quad z^{-1} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i.$$

(Comprobar que $zz^{-1} = 1$).

Propiedades : dados $z, w \in \mathbb{C}$, lo siguiente vale.

(1) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

(2) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$

(3) $\overline{z^n} = \bar{z}^n, \quad n \in \mathbb{N}$.

(4) $z\bar{z} = |z|^2$

(5) Si $z \neq 0$, $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Otras propiedades útiles son:

(1) $\bar{\bar{z}} = z$

(2) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$

(3) $z - \bar{z} = 2\,\mathrm{Im}(z)$.

(4) $z = \bar{z}$ sí y sólo si $z \in \mathbb{R}$.