Primer parcial Matemática I (Biología)

Lorena Correa

9 de Octubre de 2023

1. Hallar la forma exponencial de todos los números complejos z que satisfacen

$$z^4 = -1 + \sqrt{3}i$$

Resolución:

Empecemos observando que en nuestra ecuación tenemos z^4 por lo que tendremos exactamente cuatro soluciones.

En la práctica 1 vimos que dos números complejos son iguales si tienen mismo módulo y argumento,trabajemos con esto para hallar las cuatro soluciones.

Sea $w = -1 + \sqrt{3}i$, entonces:

$$|w| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

Por otra parte,si θ es el argumento de w,este debe cumplir

$$\cos(\theta) = \frac{Re(w)}{|w|} = -\frac{1}{2} \rightsquigarrow \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} \theta = \dfrac{2\pi}{3} \\ \\ \theta = \dfrac{4\pi}{3} \end{cases}$$

Para saber cual es el correcto podemos ubicar w en el plano y observar que este se encuentra en el segundo cuadrante,por lo que su argumento será $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$

Otra forma sería utilizar que

$$\sin(\theta) = \frac{Im(w)}{|w|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightsquigarrow \begin{cases} \sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \\ \sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Con estos datos encontremos las soluciones.

$$\left|z^4\right| = |w| \leftrightsquigarrow |z|^4 = 2 \leftrightsquigarrow |z| = \sqrt[4]{2}$$

Además

$$arg\left(z^4\right) = arg(w) = \frac{2\pi}{3}$$

Utilizando De Moivre ($arg(z^n) = n\alpha - 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ y $\alpha = arg(z)$), resulta

$$arg\left(z^4\right) = \frac{2\pi}{3}$$

$$4arg(z_k) - 2k\pi = \frac{2\pi}{3}$$

$$4arg(z_k) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$arg\left(z_k\right) = \theta_k = \frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4}, \quad 0 \leq k \leq 3$$

Ya tenemos todo para armar nuestras soluciones, recordemos que nos piden que sean en forma exponencial,con lo cual vamos a tener que usar la *fórmula de Euler*, es decir:

$$z_k = |z|e^{i\theta_k} \quad \boxed{\rightsquigarrow \begin{cases} z_0 = \sqrt[4]{2}e^{i\pi/6} \\ z_1 = \sqrt[4]{2}e^{i2\pi/3} \\ z_2 = \sqrt[4]{2}e^{i7\pi/6} \\ z_3 = \sqrt[4]{2}e^{i5\pi/3} \end{cases}}$$

2. Dos sustancias S_1 y S_2 reaccionan todos los días entre sí transformándose una en la otra. A tiempo $t+1$ la concentración de S_1 será $5/9$ de la concentración de S_1 a tiempo t y $2/9$ de lo que había de S_2 a tiempo t.Análogamente,la concentración de S_2 a tiempo $t+1$ estará dada por $7/9$ de la concentración de S_2 a tiempo t más $4/9$ de lo que había de S_1 a tiempo t. Matricialmente podemos representarlo como:

$$\begin{pmatrix} S_1(t+1) \\ S_2(t+1) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} S_1(t) \\ S_2(t) \end{pmatrix}, \quad \text{donde} \quad t \geq 0 \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} 5/9 & 2/9 \\ 4/9 & 7/9 \end{pmatrix}$$

a) Suponer que al momento inicial las sustancias están en igual concentración, es decir, $(S_1(0), S_2(0)) = (1/2, 1/2)$. Calcular la concentración de ambas al cabo de 8 días.

Resolución:

Nos piden $(S_1(8), S_2(8))$. Por lo visto en la práctica dos, esto en efecto,lo podemos calcular de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} S_1(8) \\ S_2(8) \end{pmatrix} = A^8 \begin{pmatrix} S_1(0) \\ S_2(0) \end{pmatrix}$$

Podemos hacer esta cuenta ,pero va a ser más fácil utilizar los autovalores y los autovectores de la matriz A.

Para encontrar los autovalores ,armemos el polinomio característico y encontremos sus raices.

$$P(\lambda) = \det\left(A - \lambda I\right)$$

(Obs para los estudiantes de turno noche: $P(\lambda) = \det\left(\lambda I - A\right)$ da los mismos autovalores, y los autovectores a lo sumo diferiran en un múltiplo,pero al fin y al cabo no importa que cuenta se haga)

$$P(\lambda) = \det\left(\begin{pmatrix} 5/9 & 2/9 \\ \\ 4/9 & 7/9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 5/9 - \lambda & 2/9 \\ \\ 4/9 & 7/9 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \frac{4}{3}\lambda + \frac{1}{3}$$

$$P(\lambda) = 0 \leftrightsquigarrow \lambda_{0,1} = \frac{4/3 \pm \sqrt{(-4/3)^2 - 4(1/3)}}{2} = \frac{4/3 \pm 2/3}{2}$$

Entonces, $\boxed{\lambda_0 = \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad \lambda_1 = 1}$ son los autovalores de A.

Busquemos los autovectores asociados a cada autovalor. Para ello recordemos que debemos resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} 5/9 - \lambda_k & 2/9 \\ \\ 4/9 & 7/9 - \lambda_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1$$

* $\lambda_0 = \frac{1}{3}$

$$\begin{pmatrix} 2/9 & 2/9 \\ \\ 4/9 & 4/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

La segunda fila es dos veces la primera,por lo que no hace falta triangular (aunque no hay nada malo si lo hicieron).Entonces,

$$\frac{2}{9}x_1 + \frac{2}{9}x_2 = 0 \rightsquigarrow x_1 = -x_2 \rightsquigarrow (x_1, x_2) = (-x_2, x_2) = x_2\,(-1, 1) \rightsquigarrow \boxed{T_{\lambda_0} = \langle(-1,1)\rangle = \{\alpha(1,-1) : \alpha \in \mathbb{R}\}}$$

* $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} -4/9 & 2/9 \\ 4/9 & -2/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nuevamente,la segunda fila es (-1) por la primera,por lo que no hace falta triangular Entonces,

$$-\frac{4}{9}x_1 + \frac{2}{9}x_2 = 0 \rightsquigarrow x_2 = 2x_1 \rightsquigarrow (x_1, x_2) = (x_1, 2x_1) = x_1\,(1,2) \rightsquigarrow \boxed{T_{\lambda_1} = \langle (1,2) \rangle = \{\beta(1,2) : \beta \in \mathbb{R}\}}$$

Obs importante!) Este es el despeje que a mi me quedo ,mientras que para λ_k, $k = 0, 1$, les haya quedado un múltiplo de T_{λ_k}, el ejercicio va a estar bien.

Ahora hay dos opciones:

La primera es armar la matriz de autovectores C,hallar su inversa y recordar que

$$A = CDC^{-1}, \quad \text{con} \quad D = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ó} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \quad \text{(según como hayan armado } C\text{)}$$

Entonces,$A^8 = C^{-1} D^8 C$, y desde alli continuan la cuenta.

La segunda opción es escribir a $(S_1(0), S_2(0)) = (1/2, 1/2)$ como combinación lineal de los autovectores, y usar propiedades que se dieron en clase. Vayamos por ese camino:

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \alpha(1, -1) + \beta(1, 2)$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (\alpha + \beta, -\alpha + 2\beta)$$

Es decir,

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \dfrac{1}{2} \rightsquigarrow \boxed{\beta = \dfrac{1}{3}} \\ \\ -\alpha + 2\beta = \dfrac{1}{2} \rightsquigarrow \alpha = 2\beta - \dfrac{1}{2} \rightsquigarrow \boxed{\alpha = \dfrac{1}{6}} \end{cases}$$

Ahora es fundamenal que recordemos que si λ_k es autovalor de A con autovector v_k,entonces

$$Av_k = \lambda_k v_k \rightsquigarrow A^n = \lambda_k^n v_k, \quad n \in \mathbb{N}$$

Luego

$$A^8\begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}=A^8\left(\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{6}A^8\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\frac{1}{3}A^8\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$A^8\begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^8\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\frac{1}{3}(1)^8\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

Finalmente,

$$\boxed{\begin{pmatrix}S_1(8)\\ \\ S_2(8)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2.3^9}+\dfrac{1}{3}\\ \\ -\dfrac{1}{2.3^9}+\dfrac{2}{3}\end{pmatrix}\approxeq\begin{pmatrix}0,3333\\ \\ 0,6666\end{pmatrix}}$$

b) Hallar todos los estados de equilibrio. ¿Hay estados de equlibrios no nulos?

Resolución:

Recordemos que un *estado de equilibrio* del sistema es un vector v tal que $Av=v$.

Que haya un estado de equilibrio es equivalente a que la matriz asociada al sistema tenga al 1 como autovalor, y cada autovector asociado a este autovalor (el autovector principal y sus multiplos positivos) también serán un estado de equilibrio. En el item *a*) vimos que,efectivamente, 1 es autovalor de A, y su autoespacio asociado es $T_{\lambda_1}=\langle(1,2)\rangle$. Luego todos los estados de equilibro del sistema son:

$$\boxed{v_\beta=(\beta,2\beta)\quad,\quad\beta\in\mathbb{R}\geq 0}$$

Obs) La razón por la que tomamos solamente los multiplos positivos es porque no tiene sentido considerar una concentración negativa de sustancias.

c) Suponer que las concentraciones iniciales son como en el ítem *a*) y verificar que, a largo plazo, la distribución de las sustancias $(S_1(t),S_2(t))$ tienden a un estado de equilibrio.

Resolución:

Ahora debemos calcular

$$\lim_{t\to\infty}\begin{pmatrix}S_1(t)\\S_2(t)\end{pmatrix}=\lim_{t\to\infty}A^t\begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}$$

Usando los resultados obtenidos en el ítem *a*) podemos concluir que

$$\begin{pmatrix}S_1(t)\\S_2(t)\end{pmatrix}=A^t\begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\frac{1}{3}(1)^t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

Luego

$$\lim_{t\to\infty}\begin{pmatrix}S_1(t)\\S_2(t)\end{pmatrix}=\lim_{t\to\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}}_{\to 0}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1/3\\2/3\end{pmatrix}$$

Que por el ítem $b)$ ya sabemos que es un estado de equilibrio.

3. La temperatura en un punto (x, y, z) está dada por $T(x, y, z) = 2e^{x^2-3y^2-9z^2}$, donde T se mide en $^\circ C$ y x, y, z se miden en metros.

   $a)$ Determinar la razón de cambio de la temperatura en el punto $P = (3, 0, -1)$ en la dirección hacia el punto $Q = (-2, -1, 2)$.

   Resolución:

   En este ítem debemos calcular la derivada direccional en el punto P en la dirección $\overrightarrow{w}$ siendo,

$$\overrightarrow{w}=\frac{Q-P}{\|Q-P\|}$$

   ya que recordemos que para calcular la derivada direccional en un punto, la dirección debe ser un vector unitario (es decir, $\|\overrightarrow{w}\| = 1$).

$$Q-P=(-2,-1,2)-(3,0,-1)=(-5,-1,3)\rightsquigarrow\|Q-P\|=\sqrt{(-5)^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{35}$$

   Luego, $\overrightarrow{w}=\left(-\frac{5}{\sqrt{35}},-\frac{1}{\sqrt{35}},\frac{3}{\sqrt{35}}\right)$

   La fórmula de la derivada direccional de la función T en el punto P y dirección $\overrightarrow{w}$ es:

$$\frac{\partial T}{\partial\overrightarrow{w}}(3,0,-1)=\left\langle\nabla T(3,0,-1),\left(-\frac{5}{\sqrt{35}},-\frac{1}{\sqrt{35}},\frac{3}{\sqrt{35}}\right)\right\rangle$$

   Calculemos el gradiente de T y evaluemos cada termino en $P = (3, 0, -1)$

$$T(x,y,z)=2e^{x^2-3y^2-9z^2}=\begin{cases}\dfrac{\partial T}{\partial x}(x,y,z)=T_x(x,y,z)=4xe^{x^2-3y^2-9z^2}\rightsquigarrow T_x(3,0,-1)=12\\[2ex]\dfrac{\partial T}{\partial y}(x,y,z)=T_y(x,y,z)=-12ye^{x^2-3y^2-9z^2}\rightsquigarrow T_y(3,0,-1)=0\\[2ex]\dfrac{\partial T}{\partial z}(x,y,z)=T_z(x,y,z)=-36ze^{x^2-3y^2-9z^2}\rightsquigarrow T_z(3,0,-1)=36\end{cases}$$

   Entonces,

$$\nabla T(3,0,-1)=(T_x(3,0,-1),T_y(3,0,-1),T_z(3,0,-1))=(12,0,36)$$

Finalmente

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial \overrightarrow{w}}(3,0,-1) = \left\langle (12,0,36), \left(-\frac{5}{\sqrt{35}}, -\frac{1}{\sqrt{35}}, \frac{3}{\sqrt{35}}\right) \right\rangle = \frac{48}{\sqrt{35}}}$$

b) ¿En qué dirección la temperatura disminuye más rápido en P? ¿A qué tasa se produce esta disminución?

Resolución:

La dirección donde la temperatura disminuye más rápido en P será:

$$\overrightarrow{v} = -\frac{\nabla T(3,0,-1)}{\|\nabla T(3,0,-1)\|}$$

El gradiente de T en P lo calculamos en el ítem anterior, nos había dado $\nabla T(3,0,-1) = (12,0,36)$

Por otra parte,

$$\|\nabla T(3,0,-1)\| = \sqrt{(12)^2 + 0^2 + (36)^2} = \sqrt{1440} = 12\sqrt{10}$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\overrightarrow{v} = -\frac{\nabla T(3,0,-1)}{\|\nabla T(3,0,-1)\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, 0, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)}$$

Para terminar el ejercicio debemos calcular la derivada direccional en el punto P en dirección $\overrightarrow{v}$, en esta parte no hace falta normalizar porque de hecho $\overrightarrow{v}$ es un vector unitario.

Finalmente,

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial \overrightarrow{v}}(3,0,-1) = \left\langle (12,0,36), \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, 0, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \right\rangle = -\frac{120}{\sqrt{10}}}$$

Otra forma de calcular la tasa en la que se produce la disminución es con

$$-\|\nabla T(3,0,-1)\| = -\frac{120}{\sqrt{10}} = -12\sqrt{10}$$

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que su polinomio de Taylor de orden 4 centrado en $x = 1$ es

$$P_{4,1}(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 3x + 1$$

Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $x = 0$ de la función

$$h(x) = f(x^2 - 7x + 1)$$

Resolución:

Nos piden el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $x = 0$ de h, es decir,

$$P_{2,0}(x) = h(0) + h'(0)(x - 0) + \frac{h''(0)}{2!}(x - 0)^2$$

Necesitamos calcular $h(0), h'(0)$ y $h''(0)$, teniendo en cuenta que h es una composición de funciones por lo que en ambas derivadas deberemos aplicar la regla de la cadena,y para la segunda derivada también debemos aplicar la regla del producto. (si $g, k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ entonces $(g \circ k)'(x) = g'(k(x)).k'(x)$ y $(g.k)'(x) = g'(x).k(x) + g(x).k'(x)$)

$$\begin{cases} h(x) = f(x^2 - 7x + 1) \rightsquigarrow h(0) = f(1) \\ h'(x) = f'(x^2 - 7x + 1)(2x - 7) \rightsquigarrow h'(0) = -7f'(1) \\ h''(x) = f''(x^2 - 7x + 1)(2x - 7)^2 + f'(x^2 - 7x + 1)2 \rightsquigarrow h''(0) = 49f''(1) + 2f'(1) \end{cases}$$

Para hallar los datos sobre f usamos su polinomio de orden 4 que como esta centrado en $x = 1$ sabemos que se cumple

$$f^{(n)}(1) = P_{4,1}^{(n)}(1), \quad \text{para todo} \quad 0 \leq n \leq 4$$

En nuestro caso con $n = 0, 1, 2$ nos alcanza.

$$\begin{cases} f(1) = P_{4,1}(1) = (x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 3x + 1)(1) = -4 \\ f'(1) = P'_{4,1}(1) = (4x^3 - 15^2 + 4x - 3)(1) = -10 \\ f''(1) = P''_{4,1}(1) = (12x^2 - 30x + 4)(1) = -14 \end{cases}$$

Luego,

$$\begin{cases} h(0) = f(1) = -4 \\ h'(0) = -7f'(1) = 70 \\ h''(0) = 49f''(1) + 2f'(1) = -686 - 20 = -706 \end{cases}$$

Finalmente el polinomio buscado es:

$$\boxed{P_{2,0}(x) = -4 + 70x - 353x^2}$$

FIN DEL PRIMER PARCIAL.