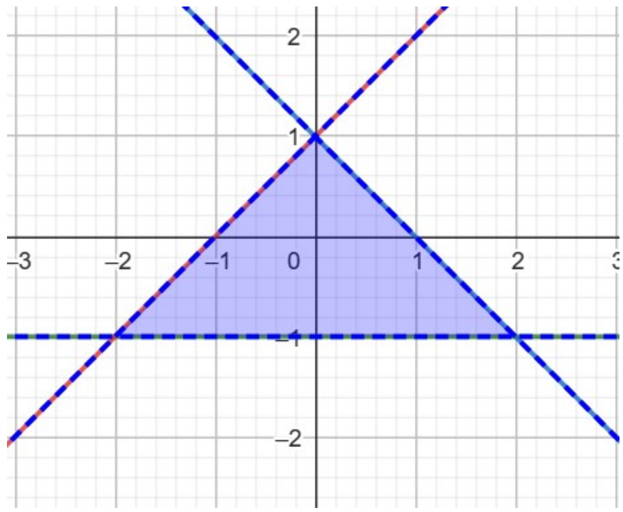
Resolución del segundo parcial

1. Hallar los máximos y mínimos absolutos de la función $f(x,y) = x^2 - 2y^3 + 1$ en la región triangular (incluye bordes) limitada por las rectas $y = -x + 1$, $y = x + 1$ y $y = -1$.

   Solución:

   La región R donde queremos buscar los máximos y mínimos absolutos de f es:

   Como R es una región cerrada y acotada y f es continua en R, por el Teorema de Weierstrass tenemos que f alcanza máximo y mínimo absolutos en la región dada.

   Buscamos primero los puntos críticos de f en el interior de la región. Para ello hallamos los valores de x y y que anulan el gradiente de f:

   $$\nabla f(x,y) = (2x, -6y^2) = (0,0) \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 0 \ \text{ e } \ y = 0.$$

   Luego, el único punto crítico en el interior de la región es el $(0,0)$.

   Los vértices de la región son puntos críticos, éstos son: $(0,1)$, $(-2,-1)$ y $(2,-1)$.

   Para buscar el resto de los puntos críticos en el borde de la región, parametrizamos cada segmento y componemos cada parametrización con la función f:

   - $\sigma_1(t) = (t, -t+1)$, con $t \in (0,2)$
     $h_1(t) = (f \circ \sigma_1)(t) = t^2 - 2(-t+1)^3 + 1$
     $h_1'(t) = 2t + 6(-t+1)^2 = 6t^2 - 10t + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \dfrac{10 \pm \sqrt{100 - 144}}{12} \notin (0,2)$
     No hay puntos críticos de f sobre σ_1.
   - $\sigma_2(t) = (t, t+1)$, con $t \in (-2,0)$
     $h_2(t) = (f \circ \sigma_2)(t) = t^2 - 2(t+1)^3 + 1$
     $h_2'(t) = 2t - 6(t+1)^2 = -6t^2 - 10t - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \dfrac{10 \pm \sqrt{100 - 144}}{-12} \notin (-2,0)$
     No hay puntos críticos de f sobre σ_2.

- $\sigma_3(t) = (t, -1)$, con $t \in (-2, 2)$
  $h_2(t) = (f \circ \sigma_3)(t) = t^2 - 1$
  $h_3'(t) = 2t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0 \in (-2, 2)$
  El punto $t = 0$ se corresponde con el punto $(0, -1)$, el cual es un punto crítico de f sobre σ_3.

  En resumen, todos los puntos críticos de f en la región R son $(0, 0)$, $(0, -1)$, $(0, 1)$, $(-2, -1)$ y $(2, -1)$.
  Finalmente, evaluamos f en todos los puntos críticos para determinar cual es su valor máximo y su valor mínimo: $f(0, 0) = 1$, $f(0, -1) = 3$, $f(0, 1) = -1$, $f(-2, -1) = 7$ y $f(2, -1) = 7$.
  El máximo de f es 7 y se alcanza en $(-2, -1)$ y $(2, -1)$.
  El mínimo de f es -1 y se alcanza en $(0, 1)$.

2. La medida de un pez en centímetros a tiempo t meses de vida se define como $x(t)$. Se supone que el pez crece de acuerdo con la ley de von Bertalanffy:

$$\begin{cases} x'(t) = k(34 - x(t)) \\ x(0) = 2 \end{cases}$$

   a) Sabiendo que a la edad de 4 meses, el pez mide 10 centímetros, determinar la constante de crecimiento k.
   b) Calcular la longitud del pez a los 10 meses.
   c) Calcular $\lim_{t \to \infty} x(t)$ y dar una interpretación del resultado en el marco de la dinámica del crecimiento del pez.

Solución:

Resolvemos la ecuación diferencial separando variables:

$$\frac{dx}{dt} = k(34 - x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dx}{34 - x} = \frac{k}{t}$$

Integrando obtenemos:

$$-\ln|34 - x| = kt + c$$

Despejando la variable x queda:

$$x(t) = 34 - Ae^{-kt}.$$

Buscamos A usando la condición inicial:

$$2 = x(0) = 34 - A \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\text{A} = 32}$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación diferencial es $\boxed{x(t) = 34 - 32e^{-kt}}$

   a) Para hallar el valor de k, usamos el dato $x(4) = 10$:

$$10 = x(4) = 34 - 32e^{-4k} \qquad \Rightarrow \qquad k = -\frac{\ln(3/4)}{4}$$

b) Queremos calcular el valor de $x(t)$ sabiendo que $t = 10$ meses:

$$x(10) = 34 - 32e^{5\ln(3/4)/2} \approx 18,41.$$

Entonces, la longitud del pez al cabo de 10 meses es aproximadamente $18,4$ cm.

c) Tenemos que $\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} 34 - 32e^{t\ln(3/4)/4} = 34,$ ya que $\frac{\ln(3/4)}{4} < 0$ y $\lim_{t\to+\infty} e^{t\ln(3/4)/4} = 0.$

Interpretación: A tiempo muy grande el tamaño del pez tiende a estabilizarze en 34 cm.

3. Para el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + y \end{cases}$$

a) Encontrar la solución general del sistema.

b) Determine bajo qué condiciones iniciales ambas coordenadas de la solución tienden a cero cuando el tiempo tiende a infinito.

Solución:

a) Podemos escribir el sistema en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \text{con } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar la solución general buscamos autovalores y autovectores de A:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

$\Rightarrow \lambda = \frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2} = \frac{2\pm 2i}{2} = 1 \pm i.$

Como los autovalores de A son complejos, las soluciones complejas serán conjugadas así que es suficiente quedarnos con una sola solución compleja y a partir de su parte real y su parte imaginaria obtendremos todas las soluciones reales del sistema.

Elegimos el autovalor $\lambda_1 = 1 + i$ y buscamos un autovector correspondiente:

$$\begin{pmatrix} 1-(1+i) & 1 \\ -1 & 1-(1+i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es decir

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Triangulando la matriz de coeficientes obtenemos que

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \leftarrow i f_1 + f_2} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo tanto, la relación entre a y b es $-ia + b = 0$, con lo cual $b = ia$. Así que un autovector asociado a $\lambda_1 = 1 + i$ puede ser $v_1 = (1, i)$.
Luego, una solución compleja del sistema es

$$\begin{aligned} e^{(1+i)t}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} &= e^t(cos(t) + i\operatorname{sen}(t))\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} \\ &= e^t\begin{pmatrix}\cos(t)\\ -\operatorname{sen}(t)\end{pmatrix} + ie^t\begin{pmatrix}\operatorname{sen}(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Concluimos que la solución general del sistema es:

$$\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} = C_1e^t\begin{pmatrix}\cos(t)\\ -\operatorname{sen}(t)\end{pmatrix} + C_2e^t\begin{pmatrix}\operatorname{sen}(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix}$$

b) Dado que $\lim\limits_{t\to+\infty} e^t\cos(t)$ y $\lim\limits_{t\to+\infty} e^t\operatorname{sen}(t)$ no existen, la única manera de que ambas coordenadas de la solución tiendan a cero es pidiendo que $C_1 = C_2 = 0$. Luego, las condición inicial bajo las cuales esto ocurre es $(x(0), y(0)) = (0, 0)$.

4. Para el siguiente sistema **no** lineal:

$$\begin{cases} x' = x(-4 + y) \\ y' = -y(3 + x)\end{cases}$$

a) Hallar todos los puntos de equilibrio y analizar la estabilidad de cada punto.

b) Esbozar el diagrama de fases alrededor de cada punto de equilibrio.

Solución:

a) Buscamos los puntos de equilibrio del sistema:

$$\begin{cases} x(-4 + y) = 0 \\ -y(3 + x) = 0\end{cases}$$

Observamos que la ecuación $x(-4 + y) = 0$ se cumple si $x = 0$ ó $y = 4$.
Analizamos que ocurre con la segunda ecuación en ambos casos:

- Si $x = 0$, tenemos reemplazando en la segunda ecuación que $-3y = 0$, con lo cual $y = 0$. Esto dice que $(0, 0)$ es un punto de equilibrio.
- Si $y = 4$, tenemos reemplazando en la segunda ecuación que $-4(3+x) = 0$, con lo cual $x = -3$. Esto dice que $(-3, 4)$ es el otro punto de equilibrio.

Los puntos de equilibrio del sistema son: $(0, 0)$ y $(-3, 4)$.
Para estudiar la estabilidad de cada punto de equilibrio, buscamos la matriz diferencial del campo $F(x, y) = (x(-4 + y), -y(3 + x))$ y la evaluamos en los P.E. para obtener el correspondiente sistema linealizado. La matriz diferencial es:

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix}-4 + y & x \\ -y & -3 - x\end{pmatrix}$$

Estudiemos la estabilidad del $(0,0)$: $DF(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ Como $DF(0,0)$ es una matriz diagonal, sus autovalores son las entradas de la diagonal, es decir, $\lambda_1 = -4$ y $\lambda_2 = -3$. Los correspondientes autovectores son $v_1 = (1,0)$ y $v_2 = (0,1)$.
Como ambos autovalores son distintos y negativos, el $(0,0)$ es un equilibrio *estable*.
Estudiemos la estabilidad del $(-3,4)$:
$DF(-3,4) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$
$\det(DF(-3,4) - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -3 \\ -4 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 12 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = 2\sqrt{3}$ y $\lambda_2 = -2\sqrt{3}$.
Buscamos autovectores:
Para $\lambda_1 = 2\sqrt{3}$:

$$\begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & -3 \\ -4 & -2\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Triangulando la matriz de coeficientes obtenemos que

$$\begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & -3 \\ -4 & -2\sqrt{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \leftarrow (-2/\sqrt{3}) f_1 + f_2} \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo tanto, la relación entre a y b es $-2\sqrt{3}a - 3b = 0$, es decir $b = -\frac{2\sqrt{3}a}{3}$. Así que un autovector asociado a $\lambda_1 = 2\sqrt{3}$ puede ser $v_1 = (\sqrt{3}, -2)$.
Para $\lambda_2 = -2\sqrt{3}$:

$$\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & -3 \\ -4 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

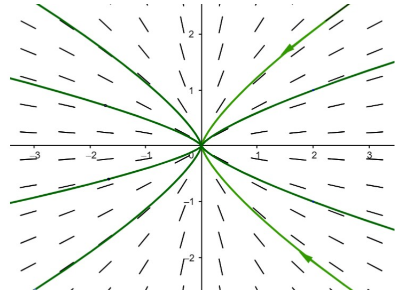
Triangulando la matriz de coeficientes obtenemos que

$$\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & -3 \\ -4 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \leftarrow (2/\sqrt{3}) f_1 + f_2} \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

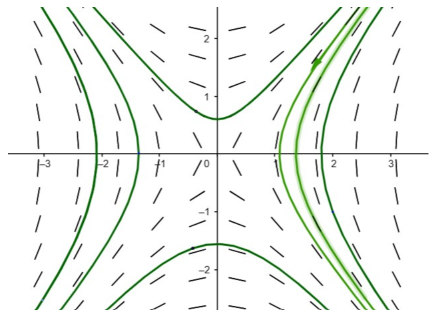
por lo tanto, la relación entre a y b es $2\sqrt{3}a - 3b = 0$, es decir $b = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$. Así que un autovector asociado a $\lambda_2 = -2\sqrt{3}$ puede ser $v_2 = (\sqrt{3}, 2)$.
Como los autovalores de $DF(-3,4)$ son de signos opuestos, el equilibrio $(-3,4)$ es *inestable*.

b) Esbozamos los diagramas de fase correspondientes a los sistemas linealizados:

- Para el $(0,0)$: Las curvas solución forman parábolas cuyo eje de simetría está determinado por el autovalor de mayor módulo, en este caso $\lambda_1 = -4$ cuyo autovector es $(1,0)$.



- Para el $(-3,4)$: Las curvas solución forman hipérbolas cuyas asíntotas están determinadas por los autovectores $v_1 = (\sqrt{3}, -2)$ y $v_2 = (\sqrt{3}, 2)$.



El diagrama del sistema no lineal tiene un comportamiento similar a los diagramas linealizados cerca de los puntos de equilibrio: