

Ejercicio 1: Sea $f(x, y) = x^3 - 3xy + \frac{3}{2}y^2 + 1$

- a) Hallar los puntos críticos de f, y en cada uno de ellos, analice si la función tiene un máximo local, mínimo local o un punto de ensilladura

Busquemos puntos críticos:

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 - 3y, -3x + 3y)$$

Los únicos puntos críticos van a ser los pares (x,y) que cumplan que

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 & (A) \\ -3x + 3y = 0 & (B) \end{cases}$$

Por (B) $-3x + 3y = 0$

$$\begin{aligned} 3y &= 3x \\ y &= x \end{aligned}$$

Usando esto en (A)

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3y &= 0 \\ 3x^2 - 3x &= 0 \\ 3x(x - 1) &= 0 \\ 3x=0 \quad x-1=0 \\ x=0 \quad x=1 \end{aligned}$$

Así que conseguimos dos puntos críticos: (0,0) y (1,1). Para clasificarlos, veamos si podemos usar el criterio del Hessiano:

$$f_{xx}(x, y) = 6x, f_{xy}(x, y) = -3, f_{yy}(x, y) = 3$$

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(Hf(0,0)) = -9 < 0$$

Por el criterio del Hessiano, (0,0) es un punto silla

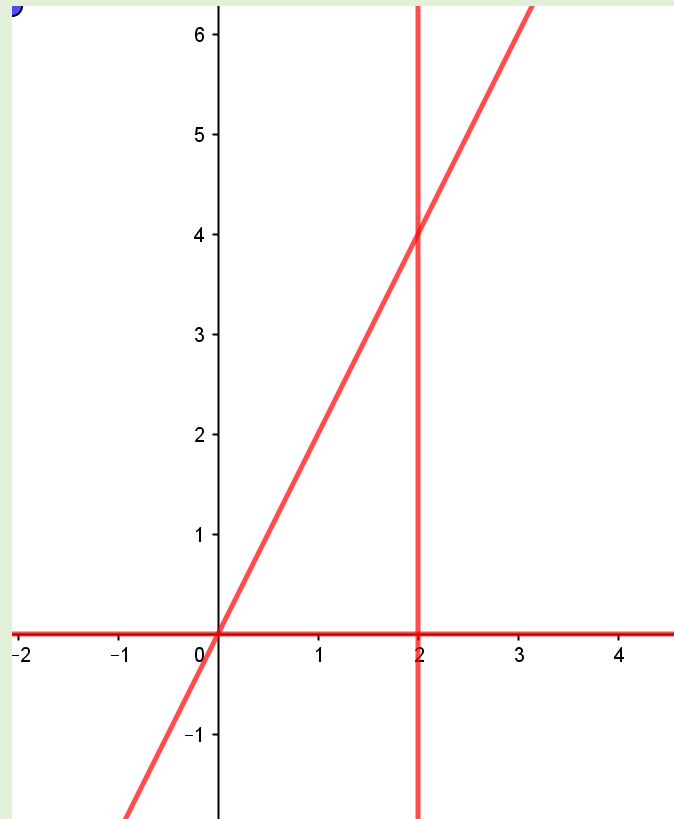
$$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(Hf(1,1)) = 18 - 9 = 9 > 0$$

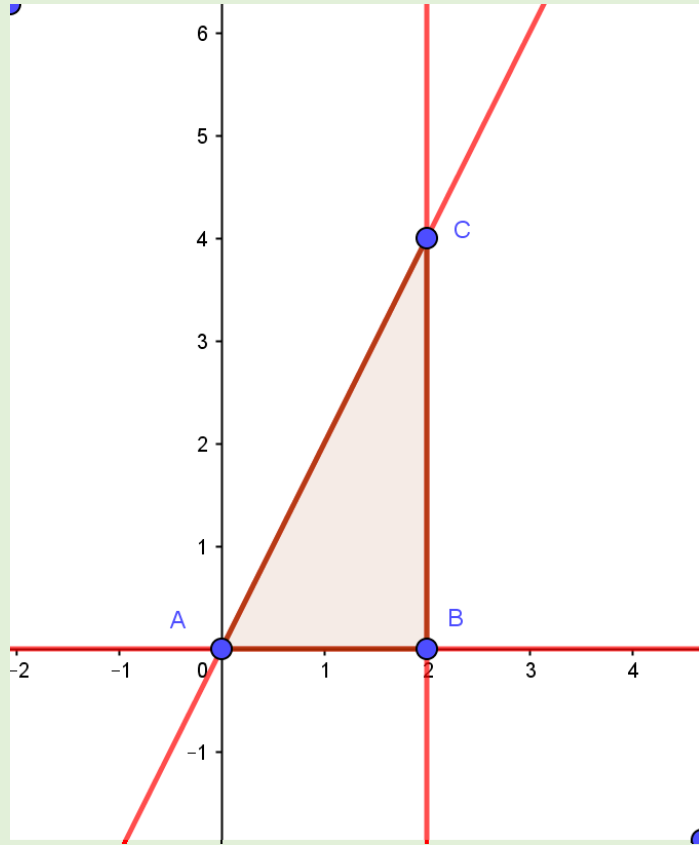
Como, además, $6 > 0$, por el criterio del Hessiano, (1,1) es mínimo local

Considere un recipiente triangular cuya base podemos pensar como la región encerrada entre las rectas $y = 0$, $x = 2$ y $y = 2x$. En el recipiente se colocan dos sustancias de tal forma que la acidez de cada punto en la base del recipiente viene dada por la fórmula $f(x, y) = x^3 - 3xy + \frac{3}{2}y^2 + 1$. Halle los puntos donde la acidez fue máxima y mínima.

Veamos como es la región triangular. Empecemos dibujando las 3 rectas:



Luego, la región triangular es:



Por el gráfico vemos que $A=(0,0)$, $B=(2,0)$ y $C=(2,4)$

Sino lo vemos, cada uno de esos puntos es la intersección de 2 de las 3 rectas del enunciado. Por ejemplo: C es la intersección de $x=2$; $y=2x$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2x \end{cases}$$

La región es cerrada (porque incluye el borde, que son los lados del triángulo), y acotada, (porque podemos encerrar la región dentro de un círculo).

Como la región es compacta y f es continua, por el Teorema de Weierstrass, sabemos que existen máximos y mínimos absolutos de f en el triángulo

Vamos a buscar todos los puntos críticos (los que estén en el interior, en el borde, y los 3 vértices)

- Puntos críticos en el interior: Buscamos los pares (x,y) que estén en el interior del triángulo y, además cumplan que $\nabla f(x,y) = (0,0)$

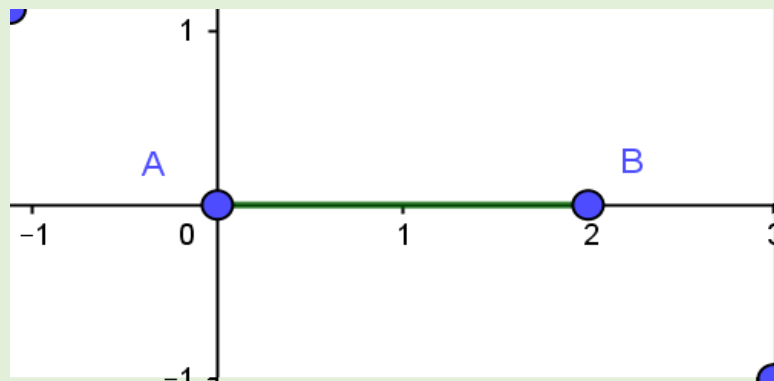
Por a) sabemos que los puntos que $\nabla f(x,y) = (0,0) \leftrightarrow (x,y) = (0,0)$ o $(x,y) = (1,1)$. Descartamos al $(0,0)$ porque no pertenece al interior

Así que conseguimos al primer punto crítico $P_1 = (1,1)$

- Puntos críticos en el borde:

El borde está formado por los 3 lados del triángulo:

Lado 1:



Parametricemos el segmento:

$$\sigma(t) = (t, 0), \text{ con } t \in [0, 2]$$

$$\begin{aligned} g(t) &= f(\sigma(t)) = f(t, 0) = t^3 - 3t * 0 + \frac{3}{2} 0^2 + 1 \\ &= t^3 + 1 \end{aligned}$$

$$g(t) = t^3 + 1, t \in [0, 2]$$

Busquemos pc en (0,2):

$$g'(t) = 0$$

$$3t^2 = 0$$

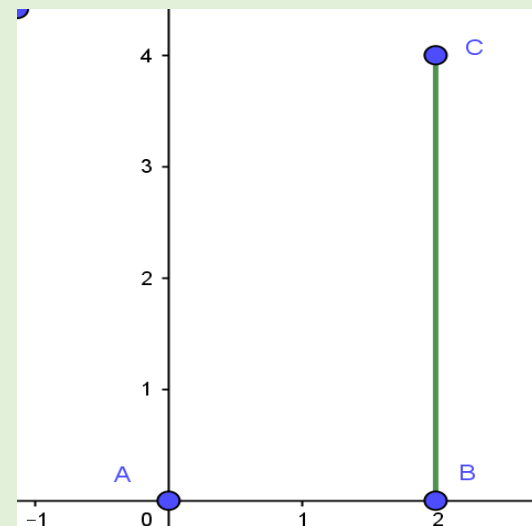
$$t = 0, \in (0, 2)$$

Los bordes del intervalo son puntos críticos de g. Así que conseguimos dos pc más para f

$$P_2 = \sigma(0) = (0, 0)$$

$$P_3 = \sigma(2) = (2, 0)$$

Lado 2



Parametricemos el segmento:

$$\sigma(t) = (2, t), \text{ con } t \in [0, 4]$$

$$\begin{aligned} g(t) &= f(\sigma(t)) = f(2, t) = 2^3 - 3 * 2 * t + \frac{3}{2} t^2 + 1 \\ &= 9 - 6t + \frac{3}{2} t^2 \end{aligned}$$

$$g(t) = 9 - 6t + \frac{3}{2} t^2, t \in [0, 4]$$

Busquemos pc en (0,4):

$$g'(t) = 0$$

$$-6 + 3t = 0$$

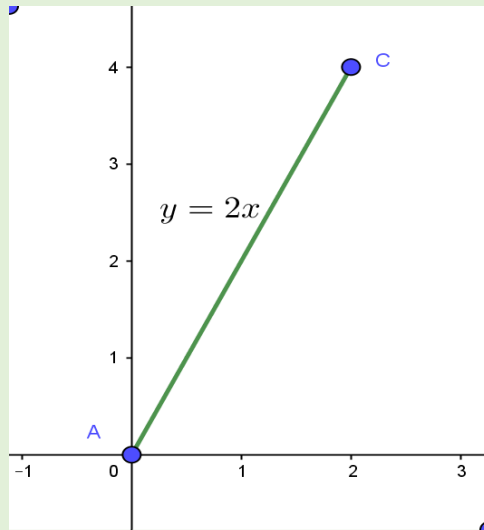
$$t = 2 \in (0,4)$$

Conseguimos otro pc: $P_4 = \sigma(2) = (2,2)$

Agregamos los bordes: $P_5 = \sigma(0) = (2,0) = P_3$

$$P_6 = \sigma(4) = (2,4)$$

Lado 3:



Parametricemos el segmento:

$$\sigma(t) = (t, 2t), \text{ con } t \in [0,2]$$

$$g(t) = f(\sigma(t)) = f(t, 2t) = t^3 - 3 * t * 2t + \frac{3}{2}(2t)^2 + 1$$

$$= t^3 - 6t^2 + 6t^2 + 1$$

$$g(t) = t^3 + 1 \in [0,2]$$

Busquemos pc en (0,2):

Esta cuenta es la misma que hicimos para el lado 1 (ya vimos que no hay pc en (0,2))

Agregamos los bordes:

$$P_7 = \sigma(0) = (0,0) = P_2$$

$$P_8 = \sigma(2) = (2,4) = P_6$$

Agregamos los vértices del triángulo:

Los vértices son (0,0), (2,0) y (4,0). Ya los agregamos antes (son P_2, P_3 , y P_6)

$$f(1,1) = 1/2$$

$$f(0,0) = 1$$

$$f(2,0) = 9$$

$$f(2,4) = 9$$

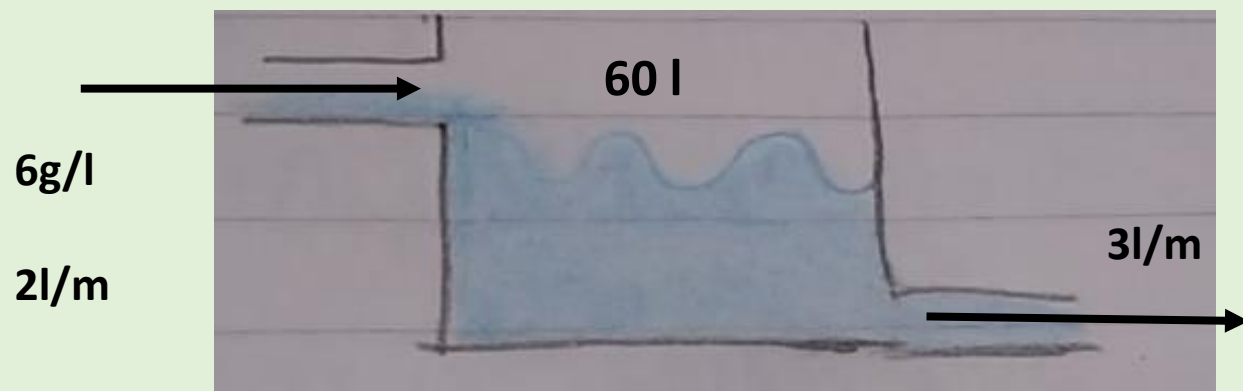
$$f(2,2) = 3$$

Los puntos donde la acidez es máxima son (2,0) y (2,4) (la acidez vale 9)

El punto donde la acidez es mínima es (1,1)

2. Un tanque que contiene inicialmente 60 litros de agua **pura** recibe durante una hora una mezcla con 6 gramos de sal por litro de agua, a una velocidad de 2 litros por minuto. Simultáneamente, durante el mismo período se extrae agua desde el tanque hacia el exterior a una velocidad de 3 litros por minuto.

- Deduzca una ecuación lineal (no homogénea, a coeficientes no constantes) para la función $x(t)$ que indica la cantidad de sal en el tanque para cada tiempo t entre 0 y 60.
- Resuelva esa ecuación y halle $x(t)$.
- ¿Cuál será la concentración cuando solo quede un litro de agua en el tanque?



a) $x(t)$ = # sal a tiempo t

Δx = variación de $x(t)$ en un intervalo Δt

$$\Delta x = (\text{\#sal que entra} - \text{\#sal que sale}) \Delta t$$

$$\text{\#sal que entra} = 6 \frac{g}{l} 2 \frac{l}{m} = 12 \frac{g}{m}$$

$$\text{\#sal que sale} = \frac{x(t)}{V(t)} \frac{g}{l} 3 \frac{l}{m}$$

Concentración de sal en el tanque a tiempo t , y $V(t)$ es el volumen de agua en el tanque a tiempo t):

$$V(t)=60+2t-3t=60-t$$

$$\#sal \text{ que sale} = \frac{x(t)}{60-t} \frac{g}{l} 3 \frac{l}{m} = \frac{3x(t)}{60-t} \frac{g}{m}$$

$$\Delta x = \left(12 - \frac{3x}{60-t} \right) \Delta t$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = 12 - \frac{3x(t)}{60-t}$$

Tomando $\lim_{\Delta t \rightarrow 0}$ de ambos lados del igual:

$$x'(t) = 12 - \frac{3x(t)}{60-t}$$

$$\begin{cases} x'(t) = 12 - \frac{3x(t)}{60-t} \\ x(0) = 0 \text{ (inicialmente hay agua pura)} \end{cases}$$

b) Resolvemos el sistema homogéneo asociado:

$$x' = -\frac{3x}{60-t}$$

$$\frac{x'}{x} = -\frac{3}{60-t} \text{ si } x \neq 0$$

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = -\frac{3}{60-t}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \int -\frac{3}{60-t} dt$$

$$\ln|x| = -3 \int \frac{1}{60-t} dt$$

$$\ln|x| = 3\ln|60-t| + C, \text{ con } C \in \mathbb{R}$$

$$e^{\ln|x|} = e^{3\ln|60-t|+C}$$

$$|x| = e^{3\ln|60-t|} e^C \rightarrow e^C = k, k > 0$$

$$|x| = e^{\ln|60-t|^3} k$$

$$|x| = k|60-t|^3$$

$$x = k|60-t|^3, \text{ con } k \neq 0$$

Como t está entre 0 y 60, $60-t > 0$

$$x(t) = k(60-t)^3, k \neq 0$$

Si $k=0$, $x(t) = 0$ verifiquemos si es solución o no:

$$x' = -\frac{3x}{60-t}$$

$$0 = -\frac{3 \cdot 0}{60-t}$$

$$0 = 0$$

Luego, $x(t)=0$ es solución. Así que todas las soluciones de la ecuación homogénea son:

$$x(t) = k(60-t)^3, k \in \mathbb{R}$$

Busquemos una solución particular. Usamos el método de variación de las constantes: Para eso, proponemos como solución:

$$x(t) = k(t)(60-t)^3$$

$$x'(t) = k'(t)(60-t)^3 - k(t)3(60-t)^2$$

Usamos esto en la ecuación diferencial:

$$x'(t) = 12 - \frac{3x(t)}{60-t}$$

$$k'(60-t)^3 - 3k(60-t)^2 = 12 - \frac{3k(60-t)^3}{60-t}$$

$$k'(60-t)^3 - 3k(60-t)^2 = 12 - 3k(60-t)^2$$

$$k'(60-t)^3 = 12$$

$$k' = 12(60-t)^{-3}$$

$$k = \int 12(60-t)^{-3} dt$$

$$k = 12 \int (60-t)^{-3} dt$$

$$k = -12 \frac{(60-t)^{-2}}{-2} + C$$

$$k = 6(60-t)^{-2} + C$$

Tomamos $C=0$. Así que una solución particular es

$$x(t) = k(t)(60-t)^3 = 6(60-t)^{-2}(60-t)^3 = 6(60-t)$$

Así que todas las soluciones de la ecuación son:

$$x(t) = k(60-t)^3 + 6(60-t), k \in \mathbb{R}$$

Usando la condición $x(0)=0$

$$\begin{aligned} x(0) &= k(60-0)^3 + 6(60-0) \\ 0 &= k60^3 + 360 \end{aligned}$$

$$-360 = k60^3$$

$$-360/60^3 = k$$

$$-1/600 = k$$

$$x(t) = -\frac{1}{600}(60 - t)^3 + 6(60 - t)$$

c)¿Cuál será la concentración cuando solo quede 1litro de agua en el tanque?

Ya vimos que el volumen de agua en el tanque a tiempo t viene dado por la fórmula 60-t

¿En qué tiempo hay 1l de agua en el tanque?

$$1=60-t$$

$$t=59$$

Nos piden la concentración de sal a los 59 min.

$$\begin{aligned}\frac{x(59)}{1} &= x(59) = -\frac{1}{600}(60 - 59)^3 + 6(60 - 59) \\ &= -\frac{1}{600} + 6 = \frac{3599}{600}\end{aligned}$$

3. Halle la solución de la ecuación de segundo orden

$$x'' - x' - 6x = 0$$

que satisface $x(0) = 4$ y $x'(0) = -3$.

Haciendo el siguiente cambio de variables: $x' = y$

Entonces $x'' = y'$. Usando estos datos en la ecuación:

$$x'' - x' - 6x = 0$$

$$y' - y - 6x = 0$$

$$y' = y + 6x$$

Debemos resolver el siguiente sistema:

$$(*) \begin{cases} x' = y \\ y' = y + 6x \end{cases}$$

La condición inicial es: $x(0)=4$ y $x'(0)=-3$

$x(0)=4$ y $y(0)=-3$

Resolvamos el sistema (*) En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Busquemos los autovalores de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 6 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(1-\lambda) - 6 = \lambda^2 - \lambda - 6$$

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

Usando la resolvente, llegamos a que $\lambda = -2$ o 3

$$S_{-2} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \quad S_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

La solución general del sistema es:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Busquemos c_1 y c_2 Para eso, usamos las condiciones iniciales:

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = c_1 e^{-2 \cdot 0} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3 \cdot 0} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -c_1 + c_2 = 4 \\ 2c_1 + 3c_2 = -3 \end{cases}$$

$$c_2 = 4 + c_1$$

$$2c_1 + 3c_2 = -3$$

$$2c_1 + 3(4 + c_1) = -3$$

$$5c_1 + 12 = -3$$

$$5c_1 = -15$$

$$c_1 = -3$$

$$c_2 = 4 + c_1 = 4 - 3 = 1$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = -3e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalmente, } x(t) = 3e^{-2t} + e^{3t}$$

4. Considere el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x' = e^{\frac{y}{2}}(x^2 - y - 1) \\ y' = -ye^{x^2} \end{cases}.$$

- a) Halle todos los puntos de equilibrio del sistema y analice la estabilidad de cada uno de ellos.
- b) Esboce el diagrama de fases del sistema en un entorno de cada punto de equilibrio estable.

a) Puntos de equilibrio:

$$\begin{cases} e^{\frac{y}{2}}(x^2 - y - 1) = 0 \text{ (A)} \\ -ye^{x^2} = 0 \text{ (B)} \end{cases}$$

Por (B) $y=0$ o $e^{x^2} = 0$

Si $y=0$, por (A)

$$e^0(x^2 - 0 - 1) = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x = \pm 1$$

Los puntos de equilibrio son (1,0) y (-1,0)

El sistema es no lineal, veamos si podemos usar el teorema de estabilidad lineal.

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} e^{y/2}2x & \frac{1}{2}e^{\frac{y}{2}}(x^2 - y - 1) + e^{\frac{y}{2}}(-1) \\ -2xye^{x^2} & -e^{x^2} \end{pmatrix}$$

$$DF(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -e \end{pmatrix}$$

Calculemos los autovalores:

$$\det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 0 & -e - \lambda \end{pmatrix} = (2 - \lambda)(-e - \lambda)$$

Los autovalores son 2 y -e.

Como ambos autovalores tienen parte real no nula. Podemos usar el teorema de estabilidad lineal: como tenemos un autovalor real positivo y uno negativo, el (1,0) es un punto silla

$$DF(-1,0) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -e \end{pmatrix}$$

Los autovalores son -2 y -e.

Como ambos autovalores tienen parte real no nula, por el teorema de estabilidad lineal: como tenemos dos autovalores negativos, el (-1,0) es un punto de equilibrio estable.

b) Solo debemos esbozar el diagrama cerca del (-1,0). Para eso, busquemos autovectores:

$$S_{-2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Para $\lambda = -e$

$$\begin{pmatrix} -2+e & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$(-2+e)x=y$$

$$x = \frac{y}{-2+e}$$

$$\left(\frac{y}{-2+e}, y \right) = y \left(\frac{1}{-2+e}, 1 \right)$$

$$S_{-e} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2+e \end{pmatrix} \right\rangle$$

Debemos dibujar los múltiplos del $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Como $-2 < 0$, las trayectorias se acercan al punto de equilibrio.

Además, debemos dibujar los múltiplos de $\begin{pmatrix} 1 \\ -2+e \end{pmatrix}$. Como $-e < 0$, las trayectorias se acercan al punto de equilibrio.

En el resto de los casos, dibujamos ramas de parábolas que se acercan al punto de equilibrio.

Estas ramas se pegan a la recta correspondiente al autovector de menor módulo. En este caso, el -2

El diagrama cerca del (-1,0) es el siguiente:

