Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Matemática

Introducción al Modelado Continuo

Segundo Cuatrimestre 2022

Guía de problemas N° 2: Análisis de Fourier

Series de Fourier

Cálculo de series de Fourier y propiedades elementales.

Ejercicio 1. Calcular los coeficientes de Fourier de las funciones periódicas de periodo 2π que siguen. Indicar en qué casos el criterio de Weierstrass permite asegurar la convergencia uniforme de las series que resultan:

1. $f(x) = x^2$ en $(-\pi, \pi)$;
2. $f(x) = x^2$ en $(0, 2\pi)$;
3. $f(x) = |\sin x|$ en $(-\pi, \pi)$;
4. $f(x) = e^{ax}$ en $(-\pi, \pi)$ con $a \neq 0$;
5. $f(x) = \cos ax$ en $(-\pi, \pi)$ con a no entero;
6. $f(x) = \sin ax$ en $(-\pi, \pi)$ con a no entero;
7. $f(x) = (\pi - x) \sin x$ en $(-\pi, \pi)$;
8. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-\pi, 0), \\ x & \text{si } x \in (0, \pi); \end{cases}$
9. $f(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x \in (-\pi, 0), \\ e^x & \text{si } x \in (0, \pi). \end{cases}$

Ejercicio 2. Escribir la serie de Fourier de la función periódica $f(x) = \left|\cos \frac{\pi x}{\ell}\right|$.

Ejercicio 3. Obtener los coeficientes de Fourier de la función

$$f_\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-\pi, \delta), \\ 1/\delta & \text{si } x \in (-\delta, \delta), \\ 0 & \text{si } x \in (\delta, \pi), \end{cases}$$

y calcular $\lim_{\delta \to 0} a_n(f_\delta)$ y $\lim_{\delta \to 0} b_n(f_\delta)$.

Ejercicio 4. Escribir la serie de Fourier de senos de la función $f(x) = \cos x$ en $(0, \pi)$.

Ejercicio 5. Escribir la serie de Fourier de cosenos de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (0, h), \\ 0 & \text{si } x \in (h, \pi). \end{cases}$$

Ejercicio 6. Escribir la serie de Fourier de senos y de cosenos de la función

$$f(x) = \begin{cases} \pi/3 & \text{si } x \in (0, \pi/3), \\ 0 & \text{si } x \in (\pi/3, 2\pi/3), \\ -\pi/3 & \text{si } x \in (2\pi/3, \pi). \end{cases}$$

Ejercicio 7.

1. Probar que si f es de clase C^1 se tiene que los coeficientes de Fourier de f y de f' se relacionan mediante las expresiones

$$a_k(f) = -\frac{b_k(f')}{k}, \quad b_k(f) = \frac{a_k(f')}{k}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Comprobar que es suficiente asumir que f' exista y sea continua a trozos.

2. Supongamos que f es continua excepto en el punto x_0 (y sus trasladados en múltiplos de 2π) en el que tiene una discontinuidad de salto. Supongamos además que f es derivable a trozos y que f' es continua a trozos, ¿cuál es la relación entre los coeficientes de Fourier de f y f'?

Ejercicio 8. (*Series de Fourier en forma compleja.*)

1. Se considera el polinomio trigonométrico
$$p_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$
Sustituyendo $\cos kx$ y $\sin kx$ por exponenciales complejas, verificar que se puede escribir de la forma
$$p_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx},$$
y expresar los coeficientes c_k en términos de a_k y b_k, y recíprocamente.
2. Si los valores de a_k y b_k son todos reales, el polinomio p_N toma sólo valores reales para $x \in \mathbb{R}$. Escribir una condición sobre los coeficientes c_k para que $p_N(x) \in \mathbb{R}$ si $x \in \mathbb{R}$.
3. Calcular las integrales en $(-\pi, \pi)$ de los productos de funciones e^{inx} y e^{imx}. Deducir las relaciones de ortogonalidad de la familia $\{e^{ikx}, k \in \mathbb{Z}\}$.
4. Supongamos que la función f de período 2π se representa por la serie trigonométrica
$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$
y que ésta es uniformemente convergente. A partir de las relaciones de ortogonalidad del ítem anterior, encontrar la expresión del $k-$*ésimo coeficiente de Fourier* c_k,
$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx.$$
5. Deducir las siguientes propiedades para los coeficientes c_k análogas a las de los coeficientes a_k y b_k:
   a) $|c_k| \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx$, donde $|c_k|$ es el módulo del número complejo c_k;
   b) $c_k(f') = ikc_k(f)$.
6. Obtener la desigualdad de Bessel
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx,$$
razonando igual a como lo hicimos para polinomios trigonométricos reales.

Convergencia de la serie de Fourier.

Ejercicio 9. Estudiar si las funciones del ejercicio 1 verifican alguna de las hipótesis que garantizan la convergencia de las series de Fourier asociadas.

Ejercicio 10. Calcular la serie de Fourier de $f(x) = Ax^2 + Bx$ definida para $x \in (0, 2\pi)$ y utilizarla para calcular las siguientes sumas:
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}(\cos kx - k\pi \sin kx).$$

Ejercicio 11. Comprobar que de la serie de Fourier de $\operatorname{sgn} x$ se obtiene la de $|x|$ por integración término a término.

Ejercicio 12. Integrando la serie de Fourier de $f(x) = x$ en $(-\pi, \pi)$ demostrar que para $-\pi \leq x \leq \pi$, se tiene

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots\right)$$

y, a partir de esta, demostrar que para $-\pi \leq x \leq \pi$,

$$x(\pi - x)(\pi + x) = 12\left(\frac{\sin x}{1^3} - \frac{\sin 2x}{2^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} - \cdots\right),$$

con convergencia uniforme en ambos casos.

Ejercicio 13. Verificar las siguientes expansiones

$$x = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots\right)$$

y

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{x^2} - \cdots\right)$$

y usar la identidad de Plancherel para deducir las sumas

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Ejercicio 14. Escribir la identidad de Plancherel para la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \alpha, \\ 0 & \text{si } \alpha < |x| < \pi. \end{cases}$$

Calcular las sumas de las series

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k\alpha}{k^2} \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2 k\alpha}{k^2}.$$

La transformada de Fourier

Ejercicio 15. Dos maneras de calcular la integral de $e^{-\pi x^2}$ en $(0, \infty)$.

1. Multiplicando la integral por sí misma se tiene una integral en el plano, que se puede escribir como integral doble utilizando el teorema de Fubini. Pasando a coordenadas polares esta integral sale directamente.
2. Aplicar el teorema de Fubini a la función $f(x, y) = ye^{-(x^2+1)y^2}$ en $(0, \infty) \times (0, \infty)$. En un sentido la integral se calcula directamente, en el otro conduce a la que buscamos.

Ejercicio 16. Dos métodos adicionales para calcular la transformada de Fourier de la función $f(x) = e^{-\pi x^2}$.

1. Utilizando el desarrollo en serie de Taylor de la función exponencial se tiene

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi x\xi}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2\pi i x\xi)^n}{n!}\, dx$$

   y se puede integrar término a término. Las integrales para n impar son nulas (pues el integrando es impar) y para n par se pueden obtener por recurrencia.

2. Completando un cuadrado se puede escribir
$$\hat{f}(\xi) = e^{-\pi\xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+i\xi)^2}\, dx$$
y llamando $h(\xi)$ a la integral del segundo miembro tenemos
$$h'(\xi) = -\,-2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} (x+i\xi) e^{-\pi(x+i\xi)^2}\, dx = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} e^{-\pi(x+i\xi)^2}\, dx = 0.$$
Entonces $h(\xi)$ es contante y su valor se calcula haciendo $\xi = 0$.

Ejercicio 17. Probar que si f es una función real, la fórmula de inversión se puede escribir como
$$f(x) = 2 \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) \cos 2\pi(x-y)\xi \, dy \, d\xi.$$

Ejercicio 18. Determinar las condiciones que debe cumplir f para que $\hat{f}$ sea real y para que sea imaginaria pura (recordar que f puede tomar valores complejos).

Ejercicio 19. Calcular las transformadas de Fourier de las funciones
$$\text{(a) } xe^{-|x|}, \qquad \text{(b) } xe^{-x^2}, \qquad \text{(c) } (4x^2-2)e^{-x^2}.$$

Transformada de Fourier discreta

Ejercicio 20. Probar que si f es real (toma valores reales) su transformada de Fourier satisface $\overline{\hat{f}[k]} = \hat{f}[-k]$. Probar que si además f es par, $\hat{f}$ es real y par. (Que f sea par se entiende sobre su extensión periódica, i.e. $f[j] = f[N-j]$.)

Ejercicio 21. Calcular la transformada discreta de Fourier de $(1,1,1,1)$ y de $(1,-i,-1,i)$ como elementos de $\mathbb{C}^4$.

Ejercicio 22. Sea $N = 8$ y f definida por $f[0] = f[1] = 1$ y $f[j] = 0$ para $j = 2,3,\ldots,7$. Calcular $\hat{f}$.

Ejercicio 23. Aplicar la transformada rápida de Fourier al caso $N = 8$ y mostrar cómo se obtiene a partir de cuatro transformadas discretas de Fourier en $\mathbb{C}^2$.

Ejercicio 24. Usar el resultado del problema anterior para calcular la transformada de Fourier discreta de la función $f[j] = 1$ si $j = 0,\ldots,5$, $f[6] = 6$, $f[7] = 7$.

Aplicaciones

Ejercicio 25. Considerar el problema de la ecuación del calor con condiciones de tipo Neumann en el borde, es decir,
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0,\pi),\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 & t > 0, \\ u(x,0) = f(x) & x \in (0,\pi). \end{cases}$$
Encontrar la solución en forma de serie de Fourier.

Ejercicio 26. Se considera el problema siguiente para la ecuación del potencial en el rectángulo $R = [0,a] \times [0,b]$:
$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & (x,y) \in R, \\ u(0,y) = u(a,y) = 0, & y \in (0,b), \\ u(x,0) = f(x);\ u(x,b) = g(x) & x \in (0,a). \end{cases}$$

Para cada y fijo, se escribe $u(x, y)$ en serie de senos en el intervalo $(0, a)$ y se continúa como en los otros casos. Completar los cálculos.

Ejercicio 27. Buscamos funciones armónicas (i.e. que verifiquen $u_{xx} + u_{yy} = 0$) en el círculo unidad del plano conociendo su valor en la circunferencia. Escribiremos la solución en coordenadas polares, de modo que buscamos $u(r, \theta)$ para $0 \leq r < 1$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Verificar que el problema a resolver es

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0 & 0 \leq r < 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ u(1, \theta) = f(\theta) & 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

Para cada r fijo, desarrollamos $u(r, \theta)$ en serie de Fourier y tenemos

$$u(r, \theta) = \frac{A_0(r)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(r) \cos k\theta + B_k(r) \sin k\theta).$$

Escribir las ecuaciones diferenciales ordinarias que deben satisfacer $A_k(r)$ y $B_k(r)$ y resolverlas; eliminar las soluciones que no sean continuas en el origen. Las constantes indeterminadas se obtienen a partir de f y la solución obtenida debe ser

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta),$$

donde a_k y b_k son los coeficientes de Fourier de f.

Ejercicio 28. Considerar la ecuación del calor en $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Comprobar, usando la solución obtenida vía transformada de Fourier, que la cantidad total de calor es constante en t. Es decir que $\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)\, dx$ es contante en t.

Ejercicio 29. Considerar la ecuación de Schrödinger

$$\begin{cases} iu_t - u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Comprobar que si u es la solución obtenida por la transformada de Fourier, entonces se cumple que $u(x, t) \to f(x)$ cuando $t \to 0$ (en media cuadrática) y que $\int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t)|^2\, dx$ es independiente de t.