Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Matemática

# Introducción al Modelado Continuo

Segundo Cuatrimestre 2023

## Guía de problemas N° 3: Construcción de modelos con EDPs

### Ecuación de difusión

**Ejercicio 1.** Sea $u$ una solución regular de $u_t - \Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$.

1. Mostrar que $u_\lambda(x,t) = u(\lambda x, \lambda^2 t)$ también resuelve la ecuación del calor para cada $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Mostrar que $v(x,t) = x \cdot \nabla u(x,t) + 2tu_t(x,t)$ también resuelve la ecuación del calor.

**Ejercicio 2.**
1. Si $\phi = \phi(x,t),\ x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0$, es una solución con simetría esférica de la ecuación del calor en $\mathbb{R}^3$ (i.e. $\phi(x,t) = w(|x|,t)$ con $w : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$), entonces $\phi$ satisface

$$\phi_{rr} + \frac{2}{r}\phi_r = \phi_t \quad t > 0,\ r > 0. \tag{1}$$

2. Mostrar que la ecuación (1) puede reducirse mediante el cambio $\psi = r\phi$ a la ecuación del calor unidimensional.

**Ejercicio 3.** Considerar el problema de la ecuación del calor con condiciones de tipo Neumann en el borde, es decir,

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0,\pi),\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 & t > 0, \\ u(x,0) = f(x) & x \in (0,\pi). \end{cases}$$

Encontrar la solución en forma de serie de Fourier.

**Ejercicio 4.** Se quiere estudiar la evolución de la temperatura de una barra unidimensional de longitud $L$ que inicialmente está a temperatura constante $u_0 > 0$ y luego se mantiene uno de los extremos de la barra a temperatura constante $u_0$ mientras que el otro extremos se lo mantiene a temperatura constante $u_1 > u_0$.

1. Observar que este problema se modela con la ecuación

$$\begin{cases} u_t - \kappa u_{xx} = 0, & x \in (0,L),\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0, & x \in (0,L) \\ u(0) = u_0, u(L) = u_1 \end{cases}$$

2. Antes de realizar cálculos especular con qué evolución se espera y cuál creen que será el estado final de la temperatura.
3. Considerar las variables adimensionales $y = x/L$ y $s = t/\tau$ donde $\tau = L^2/\kappa$ (recordar que las dimensiones del coeficiente de difusión $\kappa$ es $m^2/seg$).

   Definir entonces la función rescalada

$$v(y,s) = \frac{u(Ly, \tau s) - u_0}{u_1 - u_0}.$$

   Verificar que $v$ es solución del problema

$$\begin{cases} v_s - v_{yy} = 0 & y \in (0,1),\ s > 0 \\ v(y,0) = 0 & y \in (0,1) \\ v(0,t) = 0, v(1,t) = 1. \end{cases}$$

4. Calcular la solución estacionaria asociada al problema adimensional.
5. Si llamamos $v^*(y)$ a la solución estacionaria del ítem anterior, se define la función
$$V(y,s) = v^*(y) - v(y,s)$$
que mide el defecto de la solución del problema de evolución en alcanzar su estado estacionario. Verificar que $V$ es solución de la ecuación
$$\begin{cases} V_s - V_{yy} = 0 & y \in (0,1),\ s > 0 \\ V(y,0) = y & y \in (0,1) \\ V(0,t) = 0, V(1,t) = 0. \end{cases}$$
6. Usar el método de separación de variables para calcular $V(y,s)$ para obtener la expresión
$$V(y,s) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{2}{j\pi} e^{-j^2\pi^2 s} \sin(j\pi y).$$
7. Volver a las variables originales y encontrar una expresión para $u(x,t)$. Observar que $u(x,t)$ converge, cuando $t \to \infty$ a la solución estacionaria asociada.
8. Observar que el término principal de la expresión obtenida para $u(x,t)$ es
$$\frac{2}{\pi} e^{-\frac{\pi^2 \kappa t}{L^2}} \sin \frac{\pi}{L} x.$$
Chequear que cuando $t \sim L^2/\kappa$ este término principal se redujo aproximadamente a un 0.005 % de su amplitud original.
9. Concluir que el tiempo característico necesario para llegar al estado estacionario es del orden de $L^2/\kappa$.

**Ejercicio 5.** *Difusión con fuente de calor externa.* La temperatura de una barra de longitud infinita con temperatura inicial $f$ y sujeta a una fueenta de calor $g$ puede ser modelada por la ecuación:
$$\begin{cases} u_t - k u_{xx} &= g(x,t), & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) &= f(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$
donde $f$ y $g(\cdot,t)$ para cada $t$ fijo, son funciones de $\mathcal{S}$.

Usar la transformada de Fourier para resolver el problema.

**Ejercicio 6.** *Difusión en barra semi-infinita.* Encontrar la solución del problema
$$\begin{cases} u_t &= u_{xx}, & x > 0,\ t > 0, \\ u(x,0) &= \varphi(x), & x \geq 0 \\ u(0,t) &= 0, & t > 0 \end{cases}$$

**Ejercicio 7.** Sea $u(x,t)$ solución del problema
$$\begin{cases} u_t &= u_{xx}, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) &= \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$
dada por la convolución de $\varphi$ en la variable $x$ con la solución fundamental. Probar que si $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $u(\cdot,t) \in L^1(\mathbb{R})$ $\forall t > 0$ y
$$\int_{\mathbb{R}} u(x,t)dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx, \quad \forall t > 0.$$

**Ejercicio 8.** Considerar la ecuación del calor en $\mathbb{R}$
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Comprobar, usando la solución obtenida vía transformada de Fourier, que la cantidad total de calor es constante en $t$. Es decir que $\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\,dx$ es contante en $t$.

## Ecuación de Laplace

**Ejercicio 9.** Se considera el problema siguiente para la ecuación del potencial en el rectángulo $R = [0,a] \times [0,b]$:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & (x,y) \in R, \\ u(0,y) = u(a,y) = 0, & y \in (0,b), \\ u(x,0) = f(x);\ u(x,b) = g(x) & x \in (0,a). \end{cases}$$

Para cada $y$ fijo, se escribe $u(x,y)$ en serie de senos en el intervalo $(0,a)$ y se continúa como en los otros casos. Completar los cálculos.

**Ejercicio 10.** Buscamos funciones armónicas (i.e. que verifiquen $u_{xx} + u_{yy} = 0$) en el círculo unidad del plano conociendo su valor en la circunferencia. Escribiremos la solución en coordenadas polares, de modo que buscamos $u(r,\theta)$ para $0 \leq r < 1$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Verificar que el problema a resolver es

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 & 0 \leq r < 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ u(1,\theta) = f(\theta) & 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

Para cada $r$ fijo, desarrollamos $u(r,\theta)$ en serie de Fourier y tenemos

$$u(r,\theta) = \frac{A_0(r)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(r)\cos k\theta + B_k(r)\sin k\theta).$$

Escribir las ecuaciones diferenciales ordinarias que deben satisfacer $A_k(r)$ y $B_k(r)$ y resolverlas; eliminar las soluciones que no sean continuas en el origen. Las constantes indeterminadas se obtienen a partir de $f$ y la solución obtenida debe ser

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta),$$

donde $a_k$ y $b_k$ son los coeficientes de Fourier de $f$.

**Ejercicio 11.** *Efecto regularizante.* Probar que si $u$ es armónica en $\Omega$, entonces las derivadas de cualquier orden de $u$ también son armónicas en $\Omega$.

**Ejercicio 12.** *Problema de torsión.* Si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto abierto y acotado y $v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ es solución del

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} &=& -2, & \text{en } \Omega \\ v &=& 0, & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

probar que $u = |\nabla v|^2$ alcanza su máximo en $\partial\Omega$.

**Ejercicio 13.** *Problema de Neumann.* Sea $\Omega$ un dominio con borde regular. Probar que si $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ es solución de

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

entonces $u$ es constante.

**Ejercicio 14.** *Problema de Neumann.* Probar que si $\Omega$ es un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ y la ecuación

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

tiene una solución $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, entonces

$$\int_\Omega f(x)dx = \int_{\partial\Omega} g(x)\, dS.$$

## Ecuación de ondas

**Ejercicio 15.** item Utilizar la transformada de Fourier para obtener la fórmula de D'Alembert.

**Ejercicio 16.** *Fórmula de Dálambert.* Verificar que el cambio de variables

$$\xi = x + ct, \qquad \eta = x - ct,$$

transforma la ecuación de ondas $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ en

$$\partial_\xi \partial_\eta u = 0.$$

Usar este cambio de variables para hallar la fórmula de D'Alembert para la solución de la ecuación de ondas unidimensional.

**Ejercicio 17.** *Fuerzas externas.* El movimiento de una cuerda de longitud infinita que inicialmente está en reposo y se le aplica una fuerza externa dada por $h$ puede ser modelado de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = h(x,t) & \text{en } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 & \text{en } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Utilizar la transformada de Fourier para encontrar la solución.

**Ejercicio 18.** *Cuerda semi-infinita.* Consideramos una cuerda semi-infinita, esto es, situada sobre el semieje $x > 0$ y amarrada al origen $x = 0$. El movimiento de esta cuerda dada su posición inicial $g$ y su velocidad $h$ se puede modelar mediante la ecuación:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & x > 0,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & x > 0 \\ u_t(x,0) = h(x) & x > 0. \end{cases}$$

Encontrar una fórmula explícita para la solución.