Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Matemática

Análisis Complejo

Práctica N°5.

1. Hallar todas las f enteras tales que para todo $n \in \mathbb{N}$,
$$n^2 f\left(\frac{1}{n}\right)^2 + 1 = 0.$$

2. (a) Hallar todas las $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$ tales que $f(\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Hallar todas las f enteras tales que $f(\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. Hallar todas las $f : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C}$ holomorfas que verifican simultáneamente
   - $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = 0$,
   - $f(n) = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. Demostrar que si Ω es un abierto conexo del plano complejo, f y g son holomorfas en Ω y $\overline{f}g$ es holomorfa en Ω, entonces $g \equiv 0$ o f es constante.

5. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto conexo simétrico con respecto a $\mathbb{R}$ tal que $\Omega \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que para todo $z \in \Omega \cap \mathbb{R}$ vale que $f(z) \in \mathbb{R}$. Probar que para todo $z \in \Omega$ vale que
$$f(\overline{z}) = \overline{f(z)}.$$

6. Sea $f : B(0,1) \to \mathbb{C}, f(z) = \cos\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$. Verificar que los ceros de f son los puntos de la forma $z_n = \frac{n\pi-2}{n\pi+2}$ con n impar, que f es holomorfa en $B(0,1)$ y que los ceros de f tienen un punto de acumulación. ¿Es $f \equiv 0$ en $B(0,1)$? ¿Contradice esto el Principio de Identidad?

7. Hallar todas las funciones enteras tales que $\lim\limits_{|z| \to \infty} |f(z)| = 5$.

8. Sea f entera tal que existen dos números complejos, z_0 y z_1, $\mathbb{R}$-linealmente independientes, tales que $f(z + z_0) = f(z)$ y $f(z + z_1) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Probar que f es constante.

9. Sea f entera y R un número real positivo tal que $|f(z)| \leq M|z|^n$ para todo z tal que $|z| > R$. Probar que f es un polinomio de grado menor o igual que n.

10. Sea f entera y R un número real positivo tal que $|f(z)| \leq \sqrt{|z|}$ para todo z tal que $|z| > R$. Probar que f es constante.

11. Sea f entera y R un número real positivo tal que $|f(z)| \leq |e^z|$ para todo z tal que $|z| > R$. Probar que existe $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| \leq 1$ tal que $f(z) = \alpha e^z$.

12. Sea $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ armónica. Probar que u es constante o suryectiva.

13. Sean $P_1, P_2, \ldots, P_n \in \partial B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$. Probar que existe un punto $P \in \partial B(0,1)$ tal que el producto de las longitudes de los segmentos $\overline{PP_1}, \ldots, \overline{PP_n}$ es mayor a 1.

14. Sea f entera tal que $f(0) = \frac{1}{2}$ y $|f(z)| \leq |e^z - \frac{1}{2}|$ para todo z en $\mathbb{C}$. Probar que $f(z) = e^z - \frac{1}{2}$ para todo z en $\mathbb{C}$.

15. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo con $\overline{\Omega}$ compacto y $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ continua, holomorfa en Ω y no constante tal que $|f(z)| = \text{cte}$ para todo $z \in \partial\overline{\Omega}$. Probar que existe $z \in \Omega$ tal que $f(z) = 0$.

16. Formular y demostrar el "Principio del Módulo Mínimo" para funciones holomorfas.

17. Sea $f : B(0,1) \to B(0,1)$ homolorfa y tal que $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$. Probar que para todo $z \in B(0,1)$, $|f(z)| \leq |z|^n$ y que $|f^{(n)}(0)| \leq n!$.