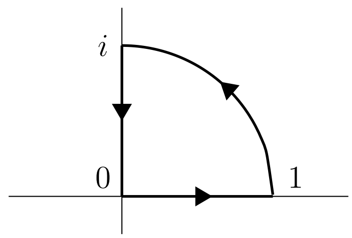
Análisis Complejo

Práctica N°4.

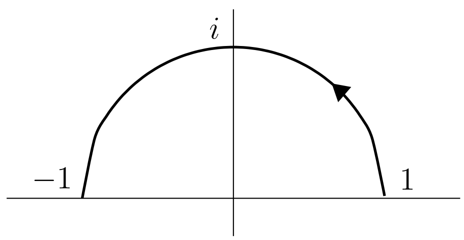
1. Calcular

   (a) $\int_\gamma \overline{z} dz$ para $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = e^{it}$,

   (b) $\int_\gamma |z|^2 z dz$ para la siguiente curva γ:



2. Sea γ la curva:



   Demostrar que

$$\Big| \int_\gamma \frac{\mathrm{sen}(z)}{z^2} dz \Big| \leq \pi \frac{1+e}{2}.$$

3. Sea $\gamma_r : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma_r(t) = re^{it}$. Probar que $\lim\limits_{r \to +\infty} \displaystyle\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$.

4. Calcular $\int_\gamma \cos(z) dz$ para las curvas γ de los ejercicios 1 y 2.

5. Sean $r \in \mathbb{R}_{>0}$, $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $|b - a| \neq r$ y $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = a + re^{it}$.

   (a) Calcular $\int_\gamma (z - b)^n dz$ si n es un entero distinto de -1.

   (b) Probar que si $|b - a| < r$, entonces $\int_\gamma \frac{dz}{z-b} = 2\pi i$.

   (c) Probar que si $|b - a| > r$, entonces $\int_\gamma \frac{dz}{z-b} = 0$.

6. Sea γ la curva cuya imagen es la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ parametrizada por $\gamma(t) = a \cos t + ib \,\mathrm{sen}\, t$ con $0 \leq t \leq 2\pi$. Calcular $\int_\gamma \frac{dz}{z}$ y deducir que $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \mathrm{sen}^2 t} = \frac{2\pi}{ab}$.

7. Calcular:

   (a) $\int_\gamma \frac{e^z}{z-2}dz, \quad \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = 4e^{it}$,
   (b) $\int_\gamma \frac{z}{z+1}dz, \quad \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = 1 + e^{ikt} \quad (k \in \mathbb{Z})$,
   (c) $\int_\gamma \frac{\operatorname{sen} z}{z^3}dz, \quad \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = e^{it}$,
   (d) $\int_\gamma \frac{\log(1+z)}{(z-\frac{1}{2})^3}dz, \quad \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = \frac{2}{3}e^{it}$,
   (e) $\int_\gamma \frac{\cos(\pi z)}{(z^2-1)^2}dz, \quad \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = 1 + e^{ikt} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

8. Hallar los términos de orden ≤ 3 en el desarrollo en serie de potencias de las siguientes funciones (extendiendo su definición a 0 por continuidad en los casos en los que sea necesario):

   (i) $e^z \operatorname{sen} z$, (ii) $\operatorname{sen} z \cos z$, (iii) $\dfrac{e^z - 1}{z}$,
   (iv) $\dfrac{e^z - \cos z}{z}$, (v) $\dfrac{1}{\cos z}$, (vi) $\dfrac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$.

9. Para $n \in \mathbb{N}$, hallar el desarrollo en serie de potencias de la funcion $f_n(z) = \frac{1}{(1+z)^n}$. (Sugerencia: $f_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} f_1^{(n-1)}$.)

10. (a) Sean Ω un abierto simplemente conexo, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa y tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$. Sean $z_0 \in \Omega$ y $w_0 \in \mathbb{C}$ tales que $e^{w_0} = f(z_0)$. Demostrar que existe una función holomorfa $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = e^{g(z)}$ para todo $z \in \Omega$ y $g(z_0) = w_0$. (Sugerencia: tomar g tal que $g' = \frac{f'}{f}$ y mostrar que $h = e^{-g}f$ es constante.)
    (b) Demostrar que tal g es única.
    (c) Mostrar con un ejemplo que en las condiciones del ítem (a), $z_1, z_2 \in \Omega$, $f(z_1) = f(z_2)$ no implica $g(z_1) = g(z_2)$.
    (d) ¿Es necesaria la hipótesis de "simplemente conexo" en el ítem (a)?

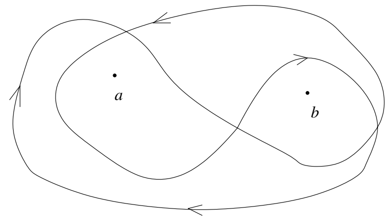
11. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto simpliemente conexo y $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ funciones holomorfas. Probar que $f^2(z) + g^2(z) = 1$ para todo $z \in \Omega$ si y sólo si existe una función $h : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $f(z) = \cos(h(z))$ y $g(z) = \operatorname{sen}(h(z))$.

12. Una función $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de tipo $\mathcal{C}^2$ es *armónica* si verifica $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. A su vez, $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una *conjugada armónica* de u si la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ es holomorfa.

    (a) Probar que si v y $\tilde{v}$ son conjugadas armónicas de u, entonces v y $\tilde{v}$ difieren en una constante.
    (b) Hallar conjugadas armónicas, cuando sea posible, de las siguientes funciones:

    (i) $u_1(x, y) = x^2 - y^2$, (ii) $u_2(x, y) = x^2y^2$, (iii) $u_3(x, y) = 2x(1 - y)$.

13. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$, $a \neq b$, y sea γ la curva en la siguiente figura:



Convencerse de que que $W(\gamma, a) = W(\gamma, b) = 0$ pero γ no es homotópica a cero en Ω.

14. Sea γ una curva continua cerrada.

    (a) Probar que $\mathbb{C} \setminus \gamma$ tiene una única componente conexa no acotada.

    (b) Probar $W(\gamma, z_0) = 0$ para todo z_0 en dicha componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma$.

15. Calcular $\int_\gamma \frac{e^z}{z} dz$ para las siguientes curvas γ: