Análisis Complejo

Práctica N°2.

1. Probar que $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ definida por $d(z, w) = |z - w|$ es una métrica.

2. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $z_0 \in \mathbb{C}$. Probar que si $\lim_{z \to z_0} f(z) = w$ entonces $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = |w|$.

3. Analizar dónde son derivables las siguientes funciones f, con $z = x + iy$. Hallar $f'(z)$ en cada caso:

   (a) $f(z) = \overline{z}$, (b) $f(z) = \cos z$,
   (c) $f(z) = x^2 + iy^2$, (d) $f(z) = x^2 - y^2 - 2xy + i(x^2 - y^2 + 2xy)$,
   (e) $f(z) = z^2 \cdot \overline{z}$.

4. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por:

$$f(x + iy) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3 + i(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} & \text{si } x + iy \neq 0 \\ 0 & \text{si } x + iy = 0. \end{cases}$$

   Verificar que $\mathrm{Re}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ tienen derivadas parciales en 0, se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann en 0 pero f no es derivable en 0.

5. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa. Demostrar que:

   (a) $\mathrm{Re}(f)$ cte $\Rightarrow f$ cte, (b) $\mathrm{Im}(f)$ cte $\Rightarrow f$ cte,
   (c) $\arg(f)$ cte $\Rightarrow f$ cte, (d) $|f|$ cte $\Rightarrow f$ cte,
   (e) $\overline{f}$ holomorfa $\Rightarrow f$ cte.

6. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa. Probar que $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ es holomorfa.

7. Hallar todas las funciones holomorfas $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tales que para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica que

$$f(x + iy) = f(x) - f(y) + 2xyi.$$

8. Hallar todas las funciones holomorfas $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tales que $f'(0) = 1$ y para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica que

$$f(x + iy) = e^x f(iy).$$

9. **Regla de L'Hospital.** Sean $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funciones derivables en z_0 tales que $f(z_0) = g(z_0) = 0$ y $g'(z_0) \neq 0$. Entonces:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Funciones logartimo y raíces n-ésimas

10. **Definición**: Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ un conjunto abierto. Una *rama del logaritmo* en Ω es una función continua $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $e^{g(z)} = z$ para todo $z \in \Omega$.

    (a) Demostrar que toda rama del logaritmo es inyectiva y holomorfa en Ω.

    (b) Sea g una rama del logaritmo en Ω. Probar que si Ω es conexo, $h : \Omega \to \mathbb{C}$ es otra rama del logaritmo en Ω si y solo si existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $h(z) = g(z) + 2k\pi i$ para todo $z \in \Omega$.

11. **Definición**: Sean $g : \Omega \to \mathbb{C}$ una rama del logaritmo, $a \in \Omega$, $b \in \mathbb{C}$. Se define $a^b = e^{b \cdot g(a)}$.

    (a) Calcular todos los valores que pueden tomar i^i, $(-1)^{\frac{3}{5}}$ y 1^π al considerar todas las posibles elecciones del logaritmo.

    (b) Probar que si $b \in \mathbb{Z}$, a^b no depende de la elección de g, y que si $b \in \mathbb{N}_0$, a^b coincide con $\underbrace{a \cdots a}_{b \text{ veces}}$.

    (c) Probar que para todos $b_1, b_2 \in \mathbb{C}$, $a^{b_1+b_2} = a^{b_1}a^{b_2}$.

    (d) Dar un ejemplo de $a \in \Omega$, $b_1, b_2 \in \mathbb{C}$ con $a^{b_1} \in \Omega$ y tales que $a^{b_1 b_2} \neq (a^{b_1})^{b_2}$.

    (e) Fija una rama del logaritmo en Ω, mostrar que las funciones $h_1 : \Omega \to \mathbb{C},\ h_1(z) = z^b$ y $h_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ h_2(z) = a^z$ son funciones holomorfas.

12. **Definición**: Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ un conjunto abierto y $n \in \mathbb{N}$. Una *rama de la raíz n-ésima* en Ω es una función continua $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $g(z)^n = z$ para todo $z \in \Omega$. En tal caso, notamos $\sqrt[n]{z}$ a $g(z)$.

    (a) Demostrar que toda rama de $\sqrt[n]{z}$ es inyectiva y holomorfa en Ω.

    (b) Sea $\sqrt[n]{z}$ una rama de la raíz n-ésima en Ω. Probar que si Ω es conexo, $\widehat{\sqrt[n]{z}} : \Omega \to \mathbb{C}$ es otra rama de la raíz n-ésima en Ω si y solo si existe $\omega \in \mathbb{C}$ con $\omega^n = 1$ tal que $\sqrt[n]{z} = \omega\,\widehat{\sqrt[n]{z}}$ para todo $z \in \Omega$.

13. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$. Sea $g(z)$ una rama del logaritmo definida en Ω y sea $\sqrt[3]{z}$ la rama de la función raíz cúbica definida en Ω por $\sqrt[3]{z} = e^{g(z)/3}$.

    (a) Demostrar que para toda rama del logaritmo g, $\sqrt[3]{z}$ pertenece a Ω para todo z en Ω.

    (b) Hallar todas las ramas del logaritmo g para las cuales $g(\sqrt[3]{z}) = \frac{1}{3}g(z)$ para todo z en Ω.

    (c) Probar que si se cambia Ω por $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$, aumenta la cantidad de ramas del logaritmo que satisfacen la condición del item (b).