Análisis Complejo

Práctica N°6.

1. Sea $f : \mathbb{C} \setminus \{0,1,2\} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$. Hallar el desarrollo en serie de Laurent de f en cada uno de los siguientes anillos:

   (i) $0 < |z| < 1$, (ii) $1 < |z| < 2$, (iii) $2 < |z|$,

   (iv) $0 < |z-1| < 1$, (v) $1 < |z-1|$, (vi) $1 < |z-2| < 2$.

2. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Mostrar que si $0 < |z| < \infty$,

$$e^{\frac{1}{2}\lambda\left(z+\frac{1}{z}\right)} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right),$$

   donde para $n \geq 0$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{\lambda \cos t} \cos(nt)\, dt$.

3. Determinar qué tipo de singularidad tiene cada una de las siguientes funciones $f(z)$ en 0. Cuando sea evitable, definir $f(0)$ de modo que f resulte holomorfa en 0. Cuando sea un polo, determinar su orden y hallar la parte singular.

   (i) $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$, (ii) $f(z) = \frac{\cos z}{z}$, (iii) $f(z) = \frac{\cos z - 1}{z}$,

   (iv) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, (v) $f(z) = \frac{\log(z+1)}{z}$, (vi) $f(z) = \frac{1}{z}\cos\left(\frac{1}{z}\right)$,

   (vii) $f(z) = \frac{z^2+1}{z(z+1)}$, (viii) $f(z) = \frac{1}{1-e^z}$.

4. Sea f holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{i, 2i\}$. Demostrar que si f tiene una singularidad no evitable en $z = i$ y en $z = 2i$, entonces el desarrollo en serie de Laurent de f en $\{1 < |z| < 2\}$ tiene infinitos términos negativos e infinitos términos positivos no nulos.

5. Sea z_0 una singularidad evitable o polo de f y una singularidad esencial de g. Determinar qué tipo de singularidad tiene fg en z_0.

6. Sea z_0 una singularidad aislada de f. Determinar qué tipo de singularidad tiene e^f en z_0 según el tipo de singularidad de f en z_0.

7. Calcular los residuos de f en cada una de sus singularidades aisladas en $\mathbb{C}$:

   (i) $f(z) = \frac{1}{z^2(z+1)}$, (ii) $f(z) = \frac{1}{z^3}\operatorname{sen} z$, (iii) $f(z) = z^5 \cos\left(\frac{1}{z}\right)$.

8. Calcular los siguientes residuos:

$$\text{(i)}\quad \frac{e^z}{(z-1)z} \text{ en } z = 0, 1, \qquad \text{(ii)}\quad \frac{\cos z - 1}{\operatorname{sen} z - z} \text{ en } z = 0, \qquad \text{(iii)}\quad \frac{z^4 e^z}{1+e^z} \text{ en } z = \pi i.$$

9. Sea C la circunferencia $\{|z| = 2\}$ recorrida en sentido positivo. Calcular

$$\text{(i)}\quad \int_C \frac{z}{z^4+1} dz, \qquad \text{(ii)}\quad \int_C \frac{1+\operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} z} dz, \qquad \text{(iii)}\quad \int_C \frac{dz}{(z+1)^2(z^2-9)}.$$

10. (a) Sea $Q : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ una función racional sin polos reales. Si $\lim\limits_{|z|\to\infty} zQ(z) = 0$, probar que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} Q(x)dx = 2\pi i \sum_{\substack{z_0 \text{ polo de } Q,\\ \operatorname{Im}(z_0)>0}} \operatorname{Res}(Q(z), z_0).$$

(b) Calcular

$$\text{(i)}\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx, \qquad \text{(ii)}\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx, \qquad \text{(iii)}\quad \int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+2x^2+1} dx.$$

11. (a) Sea $Q : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ una función racional sin polos reales. Si $\lim\limits_{|z|\to\infty} Q(z) = 0$, probar que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} Q(x)e^{ix}dx = 2\pi i \sum_{\substack{z_0 \text{ polo de } Q,\\ \operatorname{Im}(z_0)>0}} \operatorname{Res}(Q(z)e^{iz}, z_0).$$

(b) Calcular

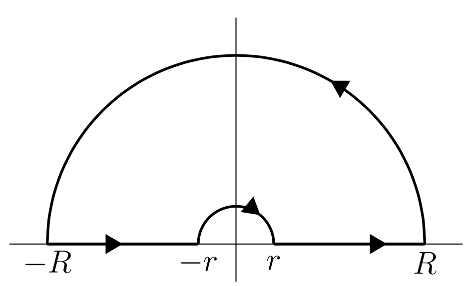
$$\text{(i)}\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx, \qquad \text{(ii)}\quad \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+1} dx.$$

12. (a) Sea $Q : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ una función racional sin polos reales, excepto en el origen, donde tiene un polo simple. Si $\lim\limits_{|z|\to\infty} Q(z) = 0$, probar que

$$\lim_{R\to+\infty,\, r\to 0^+} \left(\int_{-R}^{-r} Q(x)e^{ix}dx + \int_r^R Q(x)e^{ix}dx \right) =$$

$$= 2\pi i \sum_{\substack{z_0 \text{ polo de } Q,\\ \operatorname{Im}(z_0)>0}} \operatorname{Res}(Q(z)e^{iz}, z_0) + \pi i \operatorname{Res}(Q(z)e^{iz}, 0).$$

(Sugerencia: integrar sobre curvas del siguiente tipo, con $R \to +\infty$ y $r \to 0$.)



(b) Calcular

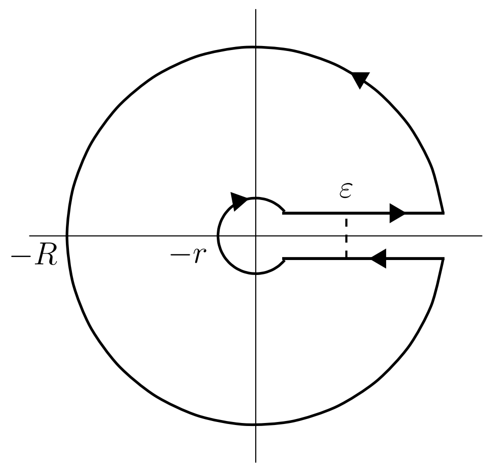
$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx.$$

13. Para $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, probar que la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx$ converge y calcularla. (Sugerencia: integrar sobre curvas como las del ejercicio anterior.)

14. (a) Sea $Q : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ una función racional sin polos en $[0, +\infty)$ y sea $\alpha \in (0,1)$. Si $\lim\limits_{z\to\infty} Q(z) = 0$, probar que

$$(1 - e^{-2\pi i\alpha}) \int_0^{+\infty} \frac{Q(x)}{x^\alpha} dx = 2\pi i \sum_{z_0 \text{ polo de } Q} \operatorname{Res}\left(\frac{Q(z)}{z^\alpha}, z_0\right),$$

donde la rama elegida de z^α es la obtenida tomando el argumento de z en $(0, 2\pi)$. (Sugerencia: integrar sobre curvas del siguiente tipo, con $R \to +\infty$, $r \to 0$ y $\varepsilon \to 0$.)



(b) Calcular

(i) $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x^2+1)} dx$, (ii) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(1+x)} dx$, (iii) $\int_0^\infty \frac{\sqrt[5]{x}}{x^3+x} dx$.

15. (a) Sea $P : \mathbb{C}^2 \to \widehat{\mathbb{C}}$ una función racional tal que el denominador no se anula sobre la circunferencia de centro 0 y radio 1 (de $\mathbb{C}^2$). Sea $Q : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ definida por

$$Q(z) = \frac{1}{z} P\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right).$$

Probar que

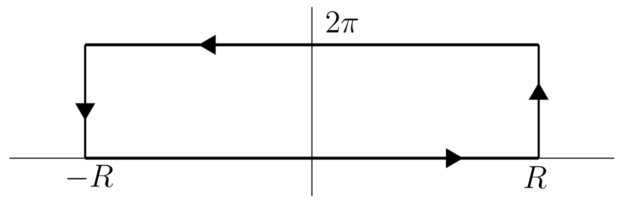
$$\int_0^{2\pi} P(\cos x, \operatorname{sen} x) dx = 2\pi \sum_{\substack{z_0 \text{ polo de } Q,\\ |z_0|<1}} \operatorname{Res}(Q(z), z_0).$$

(b) Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Calcular

(i) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\operatorname{sen} x} dx \quad (|a| > 1)$, (ii) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a+b\cos x)^2} dx \quad (0 < b < a)$,

(iii) $\int_0^{\pi} \frac{\cos(2x)}{1-2a\cos x+a^2} dx \quad (|a| < 1)$.

16. Para $0 < a < 1$ calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx$. (Sugerencia: integrar sobre curvas del siguiente tipo, con $R \to +\infty$).



17. Calcular los residuos en ∞ de las siguientes funciones:

$$\text{(i)} \quad f(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)}, \qquad\qquad \text{(ii)} \quad f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(1+z)z}.$$

18. Sea C la circunferencia $\{|z| = 2\}$ recorrida en sentido positivo. Calcular

$$\text{(i)} \quad \int_C \frac{z^2+3z-1}{z^4-2}, \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \int_C \frac{e^{z+\frac{1}{z}}}{1-z^2}.$$

19. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Se define en Ω la función $f(z) = \log\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$, tomando la rama del logaritmo definida en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ tal que $\log(r) \in \mathbb{R}$ para todo $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Calcular $\int_C f(z)dz$ siendo C la circunferencia $\{|z| = 2\}$ recorrida en sentido positivo.

20. Sea C la circunferencia $\{|z - 2i| = 2\}$ recorrida en sentido positivo. Sea f entera y tal que no se anula sobre C. Si
$$\int_C z\frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0,$$
probar que f no se anula en el interior de C.

21. Sea γ el rectángulo de vértices 0, 1, $1+3i$ y $3i$ recorrido en sentido positivo, y sea f meromorfa en $\mathbb{C}$ tal que $f(z+3i) = f(z)$ y $f(z+1) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Probar que si f no tiene polos ni ceros sobre γ, la cantidad de ceros de f en el interior de γ (contados con multiplicidad) es igual a la cantidad de polos de f en el interior de γ (contados con orden).

22. Probar que el polinomio $p(z) = 2z^5 + 7z - 1$ tiene una raíz real positiva de módulo menor que 1 y que el resto de las raíces están en $\{1 < |z| < 2\}$.

23. Probar que el polinomio $p(z) = z^5 + 15z + 1 = 0$ tiene una única raíz en $\{|z| < \frac{3}{2}\}$ y decidir si tiene alguna raíz en $\{|z| \geq 2\}$.

24. Sea $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 1$. Probar que la ecuación $z^n e^{\alpha - z} = 1$ tiene exactamente n soluciones en $\{|z| < 1\}$.