0.1. Análisis Complejo-Leonardo Lanciano- Clase 18/09/23- Indice de una curva

.

Primero ponemos un poco de contexto histórico. Todo surge a partir del teorema de la curva de Jordan.

Teorema 0.1.1. *(Teorema de la curva de Jordan) Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva cerrada y simple. Entonces γ divide a $\mathbb{C}$ en exactamente dos componentes conexas.*

En particular para γ una curva cerrada y simple, uno tiene la noción intuitiva de cuantas vueltas da al rededor de un punto del interior. La respuesta a esta pregunta es 1 si esta orientada positivamente o -1 en caso contrario. Sin embargo, hay muchas curvas que no caen en este criterio, ya que no son simples. Sin embargo, muchas veces geometricamente es claro cuantas vueltas dan al rededor de un punto, veasé en este caso una curva cerrada y simple pero que da varias vueltas sobre sí misma. En este contexto uno podría definir el winding number de una forma topológica, pero nosotros vamos a trabajar con la definición compleja que es equivalente, pero al mismo tiempo más artificial.

Definición 0.1.2. Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva continua y $z_0 \in \mathbb{C}$. Definimos el índice de z_0 en γ como:

$$\eta(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz.$$

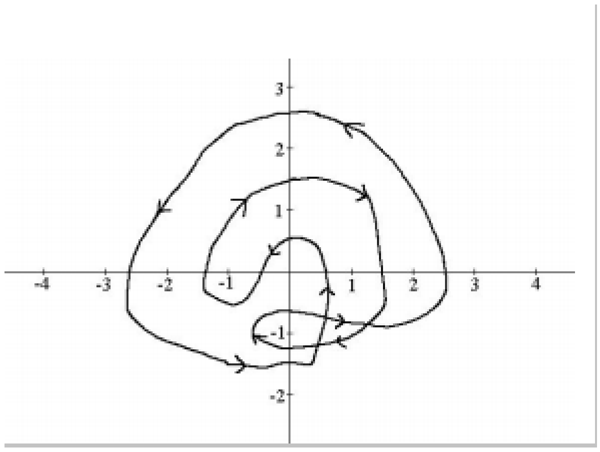
Geométricamente esto mide cuantas vueltas da la curva γ al rededor de z_0

Entonces lo que haremos ahora será enunciar un par de propiedades del índice de una curva.

Proposición 0.1.3. *Sean $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, $\alpha : [c, d] \to \mathbb{C}$ dos curvas cerradas diferenciables y $z_0 \in \mathbb{C}$. Entonces las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

1. $\eta(\gamma, z_0) \in \mathbb{Z}$.
2. *$\eta(\gamma, -)$ es localmente constante en $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$. En particular $\eta(\gamma, z_0) = 0$ si z_0 está en la componente no acotada que define γ.*
3. *Si γ y α son homotópicas, entonces vale que $\eta(\gamma, z_0) = \eta(\alpha, z_0)$.*
4. *Si $\overline{\gamma}$ es la curva γ recorrida en el sentido contrario entonces se cumple que $\eta(\overline{\gamma}, z_0) = -\eta(\gamma, z_0)$*
5. *Si $z_0 \notin Im(\gamma) \cup Im(\alpha)$ y $\gamma(b) = \alpha(c)$ y $\gamma * \alpha$ es la curva dada por la concatenación: entonces vale que:*
$$\eta(\gamma * \alpha, z_0) = \eta(\gamma, z_0) + \eta(\alpha, z_0).$$
6. *Si γ, α no pasan por el origen y $\cdot$ es la multiplicación compleja, entonces:*
$$\eta(\gamma \cdot \alpha, 0) = \eta(\gamma, 0) + \eta(\alpha, 0).$$

Ejercicio 0.1.4. *Sea γ la curva dada por el gráfico:*



Calcular $\eta(\gamma, 0)$.

Demostración. Las solucion es gráficas y fue hechas en clase en el momento. Pero dejo escrito cuanto da por las dudas:

$$\eta(\gamma, 0) = 1$$

□

Sin embargo, como ya habrán visto, es bastante molesto andar haciendo dibujitos. Entonces mi idea es exponer como uno calcula el índice sin hacer un dibujo.

Para esto damos una definición.

Definición 0.1.5. Sean $z_0 \in \mathbb{C}$ y $\theta \in [-\pi, \pi)$.

1. Un rayo $\mathcal{R}(\theta, z_0)$ en el plano complejo $\mathbb{C}$ es un conjunto de puntos definido como:

$$\mathcal{R}(\theta, z_0) = \mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} : z = z_0 + te^{i\theta}, t \geqslant 0\}$$

   donde z_0 es un punto fijo en $\mathbb{C}$, θ es un ángulo fijo en radianes, y t es un número real no negativo

2. Sea $\gamma \subseteq \mathbb{C}$ una curva de clase $\mathcal{C}^1$ y $\mathcal{R}(\theta, z_0)$ un rayo. Diremos que γ es transversal a $\mathcal{R}$ si para cada $p \in \gamma \cap \mathcal{R}$, en el que $p = \gamma(t_0)$ los números complejos $\left\{ \gamma'(t_0), e^{i\theta} \right\}$ forman una base de $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$ espacio vectorial.

Luego ahora esto nos permite definir otro invariante homotópico.

Definición 0.1.6. Sean $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva diferenciable y $\mathcal{R}(z_0, \theta)$ un rayo transversal a γ. Para cada $p = \gamma(t_0)$ definimos el número de intersección de γ y R en p, que denotamos como $i(\gamma, R, t_0)$, se define como:

$$i(\gamma, R, t_0) = \begin{cases} 1 & \text{si la base } \{e^{i\theta}, \gamma'(t_0)\} \text{ está orientada positivamente} \\ -1 & \text{si la base } \{e^{i\theta}, \gamma'(t_0)\} \text{ está orientada negativamente} \end{cases}$$

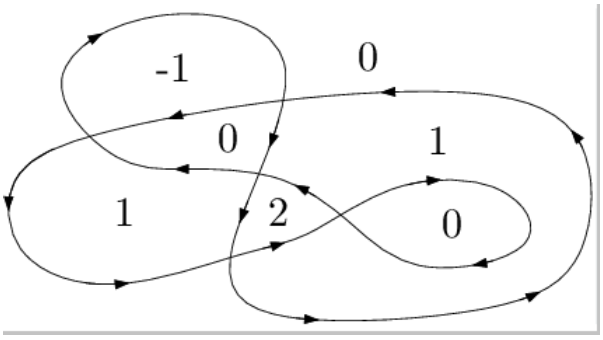
Luego, el teorema que se sigue nos da una manera muy buena de calcular los winding numbers.

Teorema 0.1.7. *Sea* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ *una curva de clase* C^1 *y* $z_0 \in \mathbb{C} \backslash \gamma$. *Sea* $R(z_0, \theta)$ *un rayo en* z_0 *transversal a* γ. *Entonces, existen solo un número finito de valores de parámetro* $t = t_1, \ldots, t_k$ *donde* $\gamma(t)$ *interseca a* R *y además:*

$$\eta(\gamma, z_0) = \sum_{j=1}^{k} i(\gamma, R, t_j).$$

Con esto en mente ahora sí, resolvemos un ejercicio.

Ejercicio 0.1.8. *Sea γ la curva dada por el siguiente gráfico.*



Calcular $\eta(\gamma, z_0)$ para todo $z_0 \in \mathbb{C}$.

Demostración. Se resuelve el ejercicio en clase. □

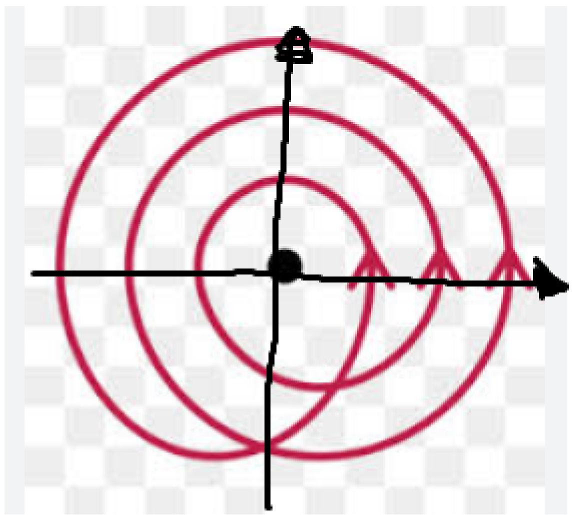
En particular, definir este invariante topológico nos da una versión más general de la formula integral de cauchy.

Teorema 0.1.9. *(Fórmula Integral de Cauchy) Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa. Dada $\gamma \subseteq U$ una curva diferenciable cerrada tal que $\eta(\gamma, z_0) = 0$ para todo $z_0 \notin U$ y $z_0 \in U \backslash \gamma$, se cumplen las siguientes fórmulas:*

1. $\eta(\gamma, z_0) f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$

2. $\eta(\gamma, z_0) \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$

Ejercicio 0.1.10. *Sea γ la curva dada por el gráfico:*



Calcular $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{\sin(z)} dz$.

Demostración. Notemos que: $\eta(\gamma, 0) = 3$ y $\sin(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_n z^n$. Luego tenemos que $\sin(z) = z \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} a_n z^{n-1} \right) = z g(z)$ con g analítica y $g(0) = 1$. Luego podemos reescribir la integral como:

$$\int_\gamma \frac{1}{\sin(z)} dz = \int_\gamma \frac{\frac{1}{g(z)}}{z} dz.$$

Ahora bien, como g es analítica, entonces g es holomorfa y en consecuecnia por la formula integral de Cauchy tenemos que:

$$\eta(\gamma, z_0)\frac{1}{g(0)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\frac{1}{g(z)}}{z}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\sin(z)}dz \Rightarrow 6\pi i = \int_\gamma \frac{1}{\sin(z)}dz.$$

$\square$

Ejercicio 0.1.11. *Sean $\gamma, \widetilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{C}$ dos curvas diferenciables que no pasan por el origen. Pruebe las siguientes afirmaciones:*

1. *Si la imagen de γ no interseca a la semirecta $[0, \infty)$, entonces $\eta(\gamma, 0) = 0$.*
2. *(Teorema del punto fijo de Brouwer). Toda función diferenciable $f : \overline{D}_1(0) \to \overline{D}_1(0)$ tiene un punto fijo.*

Demostración. Partimos en ambos casos.

1. Se sigue trivialmente de que existen ramas del logaritmo.
2. Supongamos que no. Es decir que no existen puntos fijos. Luego, consideremos la función $g(z) = \frac{f(z)-z}{z}$. Notemos que si $\gamma_1 = g(e^{it})$ entonces la traza de γ no puede tocar la semirrecta puesto que, si ese fuera el caso tendríamos que existe λ positivo y $t \in [0, 2\pi]$ tal que $f(e^{it}) - e^{it} = \lambda e^{it}$ con $\lambda > 0$. Entonces pasando para el otro lado tenemos que $|f(e^{it})| = |1 + \lambda| = 1 + \lambda > 1$ lo cual es una contradicción. En consecuencia por el item 1 se sigue que:
$$\eta(\gamma_1, 0) = 0.$$
En particular tenemos que:
$$\eta(f(e^{it}) - e^{it}, 0) = \eta(g(e^{it})e^{it}, 0) = \eta(g(e^{it}), 0) + \eta(e^{it}, 0) = 1.$$
Sin embargo, por otra parte sea $H(r,t) = f(re^{it}) - re^{it}$. Observar que H es una homotopía entre $f(0) \neq 0$ y la curva $f(e^{it}) - e^{it}$ que no pasa por el origen ya que f no tiene ningún punto fijo! Luego el índice de la curva se preserva y en consecuencia:
$$\eta(f(e^{it}) - e^{it}, 0) = \eta(f(0), 0) = 0.$$
Por lo cual tenemos una contradicción.

$\square$