0.1. Análisis Complejo- Leonardo Lanciano- Clase 13/11/23

Definición 0.1.1. (Esfera de Riemann) La esfera de Riemann se define como espacio métrico tomando el conjunto $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Su métrica es:

$$d(z, z') = \frac{2\,|z - z'|}{\sqrt{1 + |z|^2}\sqrt{1 + |z'|^2}} \text{ para } z, z' \in \widehat{\mathbb{C}}$$

Definición 0.1.2. Una Homografía o Transformación de Moebius es una aplicación $T : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ dada por:

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ tal que } ad - bc \neq 0.$$

Lo siguiente que haremos será dar una proposición que resuma todas las propiedades que conocemos de las homografías.

Proposición 0.1.3. *Sea $T : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ una homografía. Entonces se cumple que:*

1. *T es continua con d.*
2. *T es biyectiva.*
3. *T manda rectas y circunferencias en rectas y circunferencias.*
4. *T es composición de Homografías elementales.*
5. *T queda univocamente determinada por lo que valga en 3 puntos. Es decir, si dos homografías coinciden en 3 puntos, son la misma.*

Ejercicio 0.1.4. *Demostrar que $T : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ dada por $T(z) = \dfrac{z + i}{z - i}$ manda $D_1(0)$ en $\{\, z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Re}(z) < 0 \,\}$.*

Demostración. Como una homografía manda rectas y circunferencias en rectas y circunferencias hay que ver que manda 3 puntos del borde en 3 puntos del borde y luego se sigue por biyectividad. Para esto notamos que:

- $T(i) = \infty$.
- $T(1) = \dfrac{1 + i}{1 - i} = i$.
- $T(-1) = \dfrac{-1 + i}{-1 - i} = -i$.

Luego, notando que hay una única recta que pasa por esos 3 puntos y esa es la recta $L = \{\, z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Re}(z) = 0 \,\}$ Tenemos que $T(\partial D_1(0)) = L$. Luego como T es continua y manda conjuntos conexos en conjuntos conexos alcanza con ver que manda un punto del interior en otro punto del interior. Para esto, simplemente computamos

$$T(0) = \frac{i}{-i} = -1.$$

□

Ejercicio 0.1.5. *Hallar una homografía que mande el círculo $\partial D_2 = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| = 4 \,\}$ a la recta $L = \{\, z = x + iy \in \mathbb{C} \mid 3x + y = 4 \,\}$.*

Demostración. De nuevo explotamos el mandar 3 puntos en 3 puntos. Elegimos 3 puntos en la recta. Podríamos elegir otros pero los que se ven mas a mano son los siguientes:

1. $z_1 = 4i$.
2. $z_2 = 1 + i$.
3. $z_3 = \frac{4}{3}$.

Definimos T como la homografía dada por las siguientes 3 condiciones:

1. $T(4i) = 4i$
2. $T(4) = \frac{4}{3}$
3. $T(-4) = 1 + i$.

$\square$

Ejercicio 0.1.6. *Pruebe que si $H : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ es una homografía tal que $T(\widehat{\mathbb{R}}) \subseteq S^1$ entonces*

$$T(z) = \alpha\left(\frac{z-\mu}{z-\overline{\mu}}\right)$$

para ciertos números complejos $\alpha, \mu \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| = 1$.

Demostración. La manera de hacer esto es escribir una homografía genérica e ir haciendo despejes apropiados en los coeficientes. Sea T una homografía que cumple con las hipotesis del enunciado y escribamos $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$. Notar que $T(\widehat{\mathbb{R}}) \subseteq S^1$ y en consecuencia $|T(\infty)| = 1$. Es decir que $\left|\dfrac{a}{c}\right| = 1$. De esta forma, observar que llamando $\alpha = \frac{a}{c}$ y sacando factor común y renombrando y agregando un signo a las constantes tenemos que:

$$T(z) = \alpha\frac{z-c'}{z-d'}.$$

Ahora notar que evaluando en 0 tenemos que $|c'| = |d'|$. Tengamos esto presente puesto que lo usaremos luego. Ahora si, queremos ver que $c' = \overline{d'}$. Para esto consideremos $z \in \mathbb{R}$, como nuestra homografía manda $\widehat{\mathbb{R}}$ en S^1 sabemos que para todo $z \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$|z-c'| = |z-d'|.$$

Acá se puede simplificar con un argumento geométrico pero hagamos la cuenta a mano. Si $c' = u + iv$ y $d' = x + iy$ tenemos que:

$$(z-u)^2 + v^2 = (z-x)^2 + y^2 \Rightarrow -2zu + u^2 + v^2 = -2zx + x^2 + y^2 \Rightarrow u = x.$$

Donde utilizamos que $|c'| = |d'|$. Ahora bien, notar que solo existen 2 opciones, o bien $c' = d'$ o bien $c' = \overline{d'}$ ya que son dos numeros complejos que comparten módulo y parte real. Sin embargo, de ser $c' = d'$ tendríamos que T no es una homografía porque caeríamos en el caso en el que el determinante de la matriz asociada es 0. $\square$

Ejercicio 0.1.7. *Probar que si H es una homografía que tiene un único punto fijo en $\widehat{\mathbb{C}}$, entonces existe otra homografía T de manera que $T^{-1} \circ H \circ T(z) = z + 1$.*

Demostración. La clave para este tipo de ejercicios es pensar que pasaría si el punto fijo fuera el de la homografía a la que queremos llegar por conjugación. Es decir, el caso en el que T fuera la identidad. Si ese fuera el caso, el punto fijo sería el infinito y toda homografía con un punto fijo en el infinito se puede llevar a una de la forma $z + 1$. Luego lo que haremos será en primer lugar conjugar a nuestra homografía H para que tenga un punto fijo en el infinito.

Luego, sea $a \in \mathbb{C}$ el único punto fijo de H. Consideremos $T_1 : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ de manera tal que $T_1(\infty) = a$. Sabemos que hay alguna homografía que cumple con esta propiedad, no nos preocupamos precisamente por cual es. Luego notar que la homografía F dada por:

$$F = T_1^{-1} \circ H \circ T.$$

Es una homografía que tiene un único punto fijo en el infinito pues:

1. $F(\infty) = T_1^{-1}(H(T(\infty))) = T_1^{-1}(H(a)) = T_1^{-1}(a) = \infty$.
2. $F(z) = z$ si y solo si $H(T(z)) = T(z)$ es decir si y solo si $T(z)$ es un punto fijo de H, como H tiene uno solo se sigue.

Luego, notar que si $F = \dfrac{az+b}{cz+d}$, como $F(\infty) = \infty$ se sigue que $c = 0$. Luego se tiene que $F(z) = az + b$, con $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Sabemos que $a \neq 0$ por la condición del determinante, mientras que $b \neq 0$ puesto que 0 no puede ser un punto fijo de F ya que tiene un único punto fijo en el infinito. De esta manera, consideremos $T_2(z)$ como una homografía que cumple:

1. $T_2(\infty) = \infty$.
2. $F(T_2(0)) = T_2(1) \Leftrightarrow aT_2(0) + b = T_2(1)$.
3. $F(T_2(-1)) = T_2(0) \Leftrightarrow aT_2(-1) + b = T_2(0)$.

Y luego, se tiene que:

1. De la primera condición se sigue que $T_2(z) = cz + d$.
2. De la segunda, que $ad + b = c + d \Rightarrow c = (a-1)d + b$
3. De la tercera, que $a(-c + d) = d$.

Además, como $F(z) = az + b$ y tiene un único punto fijo que es el inifinito, necesariamente se tiene que $a = 1$. De esto se ve que claramente se puede despejar tal homografía, no nos preocupamos exactamente por quien es. Luego, notemos que:

$$G = T_2^{-1} \circ F \circ T_2.$$

Cumple que:

1. $G(\infty) = \infty$.
2. $G(0) = T_2^{-1}(F(T_2(0)) = T_2^{-1}(T_2(1)) = 1$.
3. $G(-1) = T_2^{-1}F(T_2(-1)) = T_2^{-1}(T_2(0)) = 0$.

Luego, G es una homografía que coincide en 3 puntos con $z + 1$ en consecuencia son la misma. De esta forma tenemos que:

$$T_2^{-1} \circ F \circ T_2 = z + 1 \Leftrightarrow T_2^{-1} \circ T_1^{-1} \circ H \circ T_1 \circ T_2 = z + 1 \Leftrightarrow T^{-1} \circ H \circ T = z + 1.$$

Donde $T = T_1 \circ T_2$.

$\square$