0.1. Análisis Complejo-Leonardo Lanciano- Clase 24/04/23- Teorema de Cauchy Goursat

Ahora recordamos la fórmula integral de cauchy.

Teorema 0.1.1. *(Fórmula Integral de Cauchy). Sea $f : D_r(z_0) \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa y consideremos γ una curva continua cerrada orientada en sentido antihorario tal que $z_0 \in Int(\gamma)$. Entonces se cumplen las siguientes fórmulas:*

1. $f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz.$
2. $\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz.$

Pasamos ahora a dar un ejercicio.

Ejercicio 0.1.2. *Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una función analítica que converge en el disco $D_1(0)$. Supongamos además que $|f(z)| \leqslant 1$ para todo $z \in D_1(0)$. Probar que $|a_n| \leqslant 1$ para todo $n \geqslant 0$.*

Demostración. Recordemos que toda función analítica es holomorfa y que los coeficientes que aparecen en la serie son los coeficientes de taylor de la misma. Es decir, tenemos la fórmula:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = a_n.$$

Luego, sea $R < 1$ y γ_R la circunferencia de radio $R \subseteq D_1(0)$. Tenemos entonces por la fórmula integral de cauchy que:

$$|a_n| = \left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_R}\left|\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_R}\frac{1}{|z|^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{R^{n+1}}2\pi = \frac{1}{R^{n+1}}.$$

Tomando límite a ambos lados con R tendiendo a 1 tenemos que:

$$|a_n| \leqslant \lim_{R\to 1^-}\frac{1}{R^{n+1}} = 1.$$

Por lo que se sigue el resultado. □

Pasamos a otro ejercicio:

Ejercicio 0.1.3. *Sea $\log(z)$ una rama del logaritmo definida sobre el conjunto $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\leqslant 0}$ de manera tal que*

$$\int_\gamma \left(\frac{\log(z)}{z-1} + \frac{z\log(z)}{(z-e)^2}\right)dz = -8\pi^2 + 4\pi i.$$

con $\gamma(t) = 2 + \frac{3}{2}e^{2\pi i t}$ y $0 \leqslant t \leqslant 1$. Calcule el valor de $\log(z)$ en el punto $z = i$.

Demostración. La idea primordial de esto será aplicar de forma inteligente la fórmula integral de cauchy. Notemos que γ es una circunferencia centrada en 2 y tiene radio $\frac{3}{2}$. Notemos que tanto 1 como e pertenecen al interior de la curva. Lo que haremos será partir la integral en 2. Es decir tenemos que:

$$\int_\gamma \left(\frac{\log(z)}{z-1} + \frac{z\log(z)}{(z-e)^2}\right)dz = \int_\gamma \frac{\log(z)}{z-1}dz + \int_\gamma \frac{z\log(z)}{(z-e)^2}dz.$$

Luego, rapidamente vemos que por la fórmula integral de cauchy tenemos que:

1. $\displaystyle\int_\gamma \frac{\log(z)}{z-1}dz = 2\pi i\log(1).$

2. $\displaystyle\int_\gamma \frac{z\log(z)}{(z-e)^2} = 2\pi i(z\log(z))'(e) = 2\pi i(\log(e)+1).$

En consecuencia tenemos que:

$$-8\pi^2 + 4\pi i = 2\pi i(\log(1) + \log(e) + 1)$$

Ahora bien, utilizando que $\log(z) = \mathrm{Log}(z) + 2\pi i k$ con $k \in \mathbb{Z}$ puesto que son dos ramas definidas en la misma región y que sabemos calcular Log de cada término tenemos que:

$$\begin{aligned}-8\pi^2 + 4\pi i = 2\pi i(\log(1) + \log(e) + 1) &= 2\pi i(\mathrm{Log}(1) + 2\pi i k + \mathrm{Log}(e) + 2\pi i k + 1)\\ &= 2\pi i(2 + 4\pi i k).\end{aligned}$$

De esta ecuación se sigue que $k = 1$. En consecuencia tenemos que:

$$\log(i) = \mathrm{Log}(i) + 2\pi i = i\frac{\pi}{2} + 2\pi i = \frac{5}{2}\pi i.$$

□

Damos un recuero de calculo numérico.

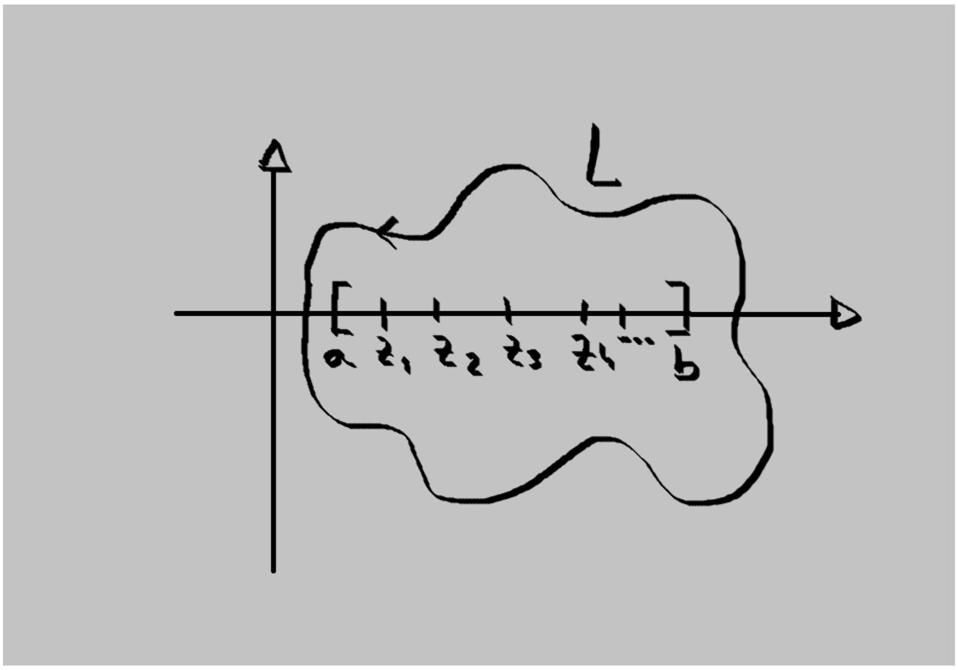
Recuerdo 0.1.4. *Sea $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^{n-1} y consideremos $z_1 < z_2 < \ldots < z_n \in (a,b)$. Entonces existe $z_0 \in (z_1, z_n)$ tal que:*

$$\frac{f^{(n-1)}(z_0)}{n!} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(z_i)}{\prod_{j\neq i}(z - z_j)}.$$

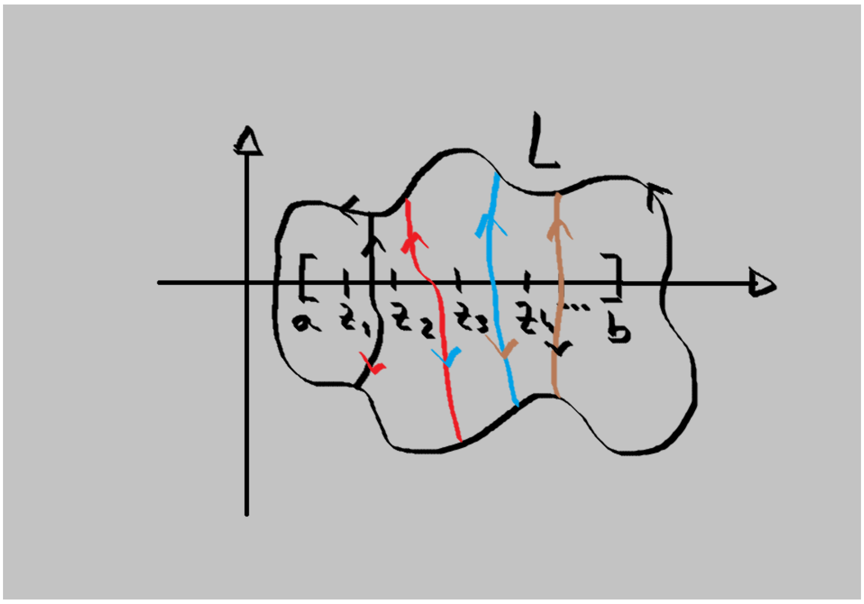
Ejercicio 0.1.5. *Sean $a \leqslant b \in \mathbb{R}$ y $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto tal que $[a,b] \in U$. Supongamos que existe $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $f|_{[a,b]} \subseteq \mathbb{R}$ y $f|_{[a,b]}$ es analítica y consideremos una curva simple continua $L \subseteq \mathbb{C}$ orientada en sentido anti-horario tal que L encierra al intervalo $[a,b]$. Entonces, $z_1, \ldots, z_n \in [a,b]$ puntos distintos, existe $z_0 \in [a,b]$ tal que:*

$$\int_L \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)}dz = \int_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^n}dz.$$

Demostración. La idea para demostrar esto, será primero hacer un dibujo. Sin pérdida de generalidad, asumimos que $z_1 < z_2 < \ldots < z_n$, sino hacemos un reordenamiento. Luego, tenemos el siguiente gráfico.



Notar que podemos pensar que el gráfico es así porque L es simple. Si bien podría eventualmente ser puntiaguda y un poco más fea, hagamos esto para ilustrar la idea detrás y despues trabajemos con todo el detalle. De esta manera, nos gustaría operar la integral de la izquierda para hallar dicho z_0. Lo que podemos hacer es subdividir la región dentro de L y utilizar la formula de Cauchy de manera ingeniosa para $f_i = \dfrac{f}{\prod_{j\neq i}(z-z_j)}$, es decir:



Observar que estas curvas que consideramos se pueden construir formalmente parándonos en dicho punto medio y considerando una curva que lo una con la parte de arriba y la de abajo de L, pero no nos detendremos en dicha construcción. De esta manera, como tenemos n puntos, tenemos n curvas $L_i \subseteq \mathbb{C}$ cerradas simples y continuas tal que L_i encierra únicamente a z_i. Por lo que:

$$\int_L \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)}dz = \sum_{i=1}^{n}\int_{L_i}\frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)}dz = \sum_{i=1}^{n}\int_{L_i}\frac{f_i}{z-z_i}dz$$
$$=_{0.1.1} 2\pi i\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{f(z_i)}{\prod_{j\neq i}(z-z_j)}\right).$$

Ahora bien, notemos que como f es analítica en $[a,b]$ en particular es C^∞ y podemos utilizar el recuerdo 0.1.4. En consecuencia por este último, existe $z_0 \in (z_1,\ldots,z_n) \subseteq [a,b]$ tal que:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{f(z_i)}{\prod_{j\neq i}(z-z_j)} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Por lo que tenemos que:

$$\int_L \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)}dz = 2\pi i\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{f(z_i)}{\prod_{j\neq i}(z-z_j)}\right) = 2\pi i\cdot\left(\frac{f^{(n-1)}(z_0)}{n!}\right)$$
$$=_{0.1.1}\int_L \frac{f^{(n)}(z)}{(z-z_0)^n}.$$

$\square$