0.1. Análisis Complejo-Leonardo Lanciano- Clase 13/11/23- Homografías y Automorfismos

Ejercicio 0.1.1. *Calcular los automorfismos de $\mathbb{C}^*$.*

Demostración. La idea de este ejercicio y en general de los ejercicios de clasificación de automorfismos en donde consideramos un abierto de $\mathbb{C}$ menos un punto es intentar ver que realmente está pasando en ese punto. Luego, consideremos $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^* \in Aut(\mathbb{C}^*)$, tenemos tres opciones:

1. 0 es una singularidad esencial.
2. 0 es una singularidad evitable.
3. 0 es un polo de algún orden.

De esta manera, estudiamos cada caso por separado.

1. Supongamos que 0 es una singularidad esencial. En general para este tipo de condiciones, se utiliza lo único que se tiene a mano que es el teorema de Cassoratti-Weierstrass. Sabemos que para todo $\varepsilon > 0$, $f(\mathbb{D}_\varepsilon(z_0)\setminus\{z_0\})$ es denso en $\mathbb{C}$. Luego, sea $V = ((D_1(3))^\circ)$ (notar que estos números están elegidos para estar lejos del cero, pero se puede agarrar cualquier otro). Observemos que como V es abierto f es un homeomorfismo, entonces $f(V)$ es abierto. Más aún, para ε lo suficientemente chico, por ejemplo $\frac{1}{2}$, tenemos que $f(D_{\frac{1}{2}}(0))$ es denso en $\mathbb{C}$. De esta forma tenemos que:
$$\varnothing = f(V \cap D_{\frac{1}{2}}(0)) = f(V) \cap f(D_{\frac{1}{2}}(0)) \neq \varnothing.$$
Lo cual es una contradicción que vino de suponer que la singularidad podía ser esencial.

2. Ahora supongamos que 0 es una singularidad evitable. Para esto, extendemos a f de manera holomorfa a $\mathbb{C}$ donde $f(0) = \lim_{z\to 0} f(z)$. Acá tenemos dos casos:
   a) Si $f(0) = 0$, ya estamos puesto que $f \in Aut(\mathbb{C})$ y $f(0) = 0$ por lo que $f(z) = \lambda z$ para $\lambda \in \mathbb{C}^*$.
   b) Si $f(0) \neq 0$, consideramos $f^{-1} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$. Notamos que $f^{-1} \circ f(z) = z$ para todo $z \in \mathbb{C}^*$ por el principio de identidad, tenemos que $f^{-1} \circ f(z) = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Pero entonces, como $f(0) \neq 0$ existe $\xi \in \mathbb{C}^*$ tal que $f(0) = f(\xi)$. En consecuencia tenemos lo siguiente:
   $$0 = f^{-1}(f(0)) = f^{-1}(f(\xi)) = \xi.$$
   De esta forma, tenemos una contradicciión que vino de suponer que $f(0) \neq 0$.

3. El caso en el que cero sea un polo de algún orden, es bastante divertido porque sale de entender la estructura de las funciones de este grupo de automorfismos. Observando que $\frac{1}{z} \in Aut(\mathbb{C}^*)$ y que los grupos de automorfismos son cerrados por composición, observemos que si f tiene un polo de orden k en cero, entonces $\frac{1}{f} = \frac{1}{z} \circ f$ tiene una singularidad evitable en cero, y por lo anterior, tenemos que $\frac{1}{f} = \lambda z$ con $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

En resumen, hemos probado lo siguiente:
$$Aut(\mathbb{C}*) \subseteq \left\{ f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^* \;\middle|\; f(z) = \lambda z \text{ o } f(z) = \frac{\lambda}{z}, \lambda \in \mathbb{C}^* \right\}.$$
Les queda como ejercicio a ustedes ver que esos son todos automorfismos y en consecuencia vale la igualdad. □

Comenzamos la clase recordando el teorema de la aplicación conforme de Riemann.

Teorema 0.1.2. *(Teorema de la aplicación conforme de Riemann). Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un dominio simplemente conexo tal que $\Omega \neq \mathbb{C}$. Entonces, para cada $z_0 \in \Omega$ existe un único biholomorfismo $F : \Omega \to \mathbb{D}_1(0)$ tal que:*
$$F(z_0) = 0 \text{ y } F'(z_0) \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Este teorema está muy bueno porque moralmente nos clasifica todos los grupos de automorfismos de abiertos propios simplemente conexos de $\mathbb{C}$.

Recuerdo 0.1.3. *Se tiene que:*

$$Aut(\mathbb{D}_1(0)) = \left\{ f : \mathbb{D}_1(0) \to \mathbb{D}_1(0) \;\middle|\; f(z) = e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z},\ \alpha \in \mathbb{D}_1(0), \theta \in [0, 2\pi) \right\}.$$

Entonces, sea Ω un dominio simplemente conexo de $\mathbb{C}$ que no es todo $\mathbb{C}$. Consideremos $Aut(\Omega) = \{ \varphi : \Omega \to \Omega \mid f \text{ es un biholomorfismo} \}$. Luego, por el teorema de Riemann 0.1.2 tenemos un biholomorfismo $F : \Omega \to \mathbb{D}_1(0)$. En consecuencia, notemos que para todo biholomorfismo $\varphi : \Omega \to \Omega$ tenemos que:

$$F \circ \varphi \circ F^{-1} : \mathbb{D}_1(0) \to \mathbb{D}_1(0) \text{ es un biholomorfismo de } \mathbb{D}_1(0).$$

En consecuencia, tenemos que existe $\alpha \in \mathbb{D}_1(0)$ y $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que:

$$F(\varphi(F^{-1}(z))) = e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z} \Rightarrow \varphi(z) = F^{-1}\left(e^{i\theta}\frac{F(z)-\alpha}{1-\overline{\alpha}F(z)}\right).$$

De esta forma, hemos probado que:

$$Aut(\Omega) = \left\{ \varphi : \Omega \to \Omega \;\middle|\; \varphi(z) = F^{-1}\left(e^{i\theta}\frac{F(z)-\alpha}{1-\overline{\alpha}F(z)}\right), \alpha \in \mathbb{D}_1(0), \theta \in [0, 2\pi) \right\}.$$

El problema con esto es que la función F dada por el teorema de Riemann no está dada de manera constructiva. Sin embargo en algunos casos si se puede calcular y en consecuencia estaríamos.

Antes de pasar a dar un ejercicio, damos un recuerdo de un teorema que es útil.

Teorema 0.1.4. *Sean $U, V \subseteq \mathbb{C}$ abiertos y $f : U \to V$ holomorfa e inyectiva. Entonces $f^{-1} : V \to U$ es holomorfa.*

De este teorema se sigue el siguiente corolario.

Corolario 0.1.5. *Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto y T una homografía definida en U. Entonces T es un biholomorfismo entre U y $T(U)$.*

Demostración. Como T está definida en U entonces T es holomorfa en U. Más aún, sabemos que $T : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ es biyectiva y en consecuencia T es inyectiva en U. Luego se sigue del teorema 0.1.4 que T es un biholomorfismo. □

Además, tenemos el siguiente recuerdo que vimos en clase.

Recuerdo 0.1.6. *Sea $H^+ = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Im}(z) > 0 \}$. Entonces se tiene que:*

$$Aut(H^+) = \left\{ f : H^+ \to H^+ \;\middle|\; f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \text{ donde } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ y } ad - bc > 0. \right\}$$

Ahora utilicemos este teorema y la idea detrás del teorema de Riemann para resolver un ejercicio.

Ejercicio 0.1.7. *Sea $L = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Im}(z) > 0, \mathfrak{Re}(z) > 0 \}$. Calcular $Aut(L)$.*

Demostración. Observemos que L es simplemente conexo. Como bien dijimos antes, la función de Riemann no es constructiva, pero en este caso podemos hacerlo. La idea será encontrar a mano el biholomorfismo $F : L \to \mathbb{D}_1(0)$. Sin embargo, cuando la región es un poco complicada, lo mejor es hacerlo por pasos.

Luego, sea $H^+ = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Im}(z) > 0 \}$. Consideremos $h : L \to \mathbb{C}$ definida por $h(z) = z^2$. Notar que $h(L) = H^+$ puesto que, dado $w \in H^+$ entonces $w = re^{i\theta}$ con $\theta \in (0, \pi)$ en consecuencia si consideramos $z_0 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ tenemos que $z_0 \in L$ puesto que $0 < arg(z_0) < \frac{\pi}{2}$ y más aún $h(z_0) = w$ por lo que h es sobreyectiva. Por otra parte, notar que h es inyectiva puesto que si existen $z, w \in L$ tal que $h(z) = h(w) \Rightarrow z^2 = w^2 \Rightarrow (z-w)(z+w) = 0$. Observar que esto implica que $z = w$ o $z = -w$. Pero como $w \in L$, tenemos que $-w \notin L$ y en consecuencia como $z \in L$ tenemos que $z \neq -w$ lo cual implica que $z = w$. Luego por el teorema 0.1.4 tenemos que z^2 es un biholomorfismo entre H^+ y L. Resta ahora con encontrar un biholomorfismo entre H^+ y $\mathbb{D}_1(0)$. Pero afirmamos que para esto solo basta con encontrar una homografía que mande $\mathbb{D}_1(0)$ en H^+. Esto resulta muy sencillo y queda como ejercicio verificar que:

$$T(z) = \frac{z-i}{z+i} \text{ cumple que } T(H^+) = \mathbb{D}_1(0).$$

Más aún, por el corolario 0.1.5 T resulta un biholomorfismo entre H^+ y $\mathbb{D}_1(0)$. En consecuencia, componiendo, tenemos que $T \circ h : L \to \mathbb{D}_1(0)$ es un biholomorfismo. Observemos que, $(T \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ T^{-1}$ y en consecuencia por lo anterior, tenemos que:

$$\begin{aligned} Aut(L) &= \left\{ \varphi : L \to L \;\middle|\; \varphi(z) = h^{-1}\left(T^{-1}\left((e^{i\theta}\frac{T(h(z)) - \alpha}{1 - \overline{\alpha}T(h(z))}\right)\right), \alpha \in \mathbb{D}_1(0), \theta \in [0, 2\pi) \right\} \\ &= \left\{ \varphi : L \to L \;\middle|\; \varphi = h^{-1} \circ \left(T^{-1} \circ \left(e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right) \circ T\right) \circ h, \alpha \in \mathbb{D}_1(0), \theta \in [0, 2\pi) \right\}. \end{aligned}$$

Ahora bien, notemos que, por la cuenta que hicimos antes es:

$$\begin{aligned} Aut(H^+) &= \left\{ \psi : H^+ \to H^+ \;\middle|\; \psi(z) = T^{-1}\left(e^{i\theta}\frac{T(z) - \alpha}{1 - \overline{\alpha}F(z)}\right), \alpha \in \mathbb{D}_1(0), \theta \in [0, 2\pi) \right\} \\ &= \left\{ \psi : H^+ \to H^+ \;\middle|\; \psi(z) = T^{-1} \circ \left(e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right) \circ T, \alpha \in \mathbb{D}_1(0), \theta \in [0, 2\pi) \right\}. \end{aligned}$$

Pero a su vez, por el recuerdo tenemos que:

$$Aut(H^+) = \left\{ f : H^+ \to H^+ \;\middle|\; f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \text{ donde } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ y } ad - bc > 0 \right\}.$$

En consecuencia, tenemos que:

$$\begin{aligned} Aut(L) &= \left\{ \varphi : L \to L \;\middle|\; \varphi = h^{-1} \circ \frac{az+b}{cz+d} \circ h, \text{ donde } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ y } ad - bc > 0 \right\} \\ &= \left\{ \varphi : L \to L \;\middle|\; \varphi(z) = \sqrt{\frac{az^2+b}{cz^2+d}}, \text{ donde } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ y } ad - bc > 0 \right\}. \end{aligned}$$

□

Ejercicio 0.1.8. *Hallar una equivalencia conforme entre los abiertos*

$$U = \{ z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < e^{2\pi}, z \notin \mathbb{R}_{<0} \} \text{ y } V = \{ z \in \mathbb{C} \mid |\mathfrak{Re}(z)| + |\mathfrak{Im}(z)| < 1 \}.$$

Demostración. La idea de este tipo de ejercicios es construir a mano el biholomorfismo haciendolo de a pasos. En primer lugar, notemos que la rama principal del logaritmo está definida en U y el modulo de z se mueve entre 1 y $e^{2\pi}$. En consecuencia, como Log es inyectiva puesto que es una inversa de la exponencial en su dominio, tenemos que U es biholomorfo con $Log(U)$. Ahora bien, dado $z \in U$, notemos que $Log(z) = Ln(|z|) + iArg(z)$. Como en este caso $Arg(z) \in (-\pi, \pi)$ y $1 < |z| < 2\pi$ tenemos que:

$$U \cong Log(U) = \{ z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathfrak{Re}(z) < 2\pi, -\pi < \mathfrak{Im}(z) < \pi \}.$$

Observemos que $Log(U)$ tiene una forma mas cuadrada ahora mismo y se parece más a V. Lo siguiente será hacer una traslación apropiada para que el cuadrado $Log(U)$ esté centrado en el origen. Sea $H(z) = z - \pi$. Luego tenemos que:

$$U \cong Log(U) \cong H(Log(U)) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |\mathfrak{Re}(z)| < \pi, |\mathfrak{Im}(z)| < \pi \}.$$

Luego, definimos $T(z) = e^{i\frac{\pi}{4}} \dfrac{z}{\sqrt{2}\pi}$. Obsevemos nuevamente que al tratarse de una función lineal se tiene que $T(z)$ es inyectiva por lo que tendremos que:

$$U \cong Log(U) \cong H(Log(U)) \cong T(H(Log(U))).$$

Luego, alcanza con ver que $T(H(Log(U))) = V$. Sin embargo, esto es claro y queda como ejercicio para el lector puesto que T lo que hace es reescalar y aplicar una rotación de $\frac{\pi}{4}$. Luego, la equivalencia conforme entre U y V es la función $F = T \circ H \circ Log$. $\square$