Análisis Complejo

Práctica N°8.

1. Para $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| \neq 1$, demostrar que la homografía
$$T_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{-\overline{\alpha}z+1}$$
transforma a la circunferencia $\{|z|=1\}$ en si misma y a α en 0. Notar que T_0 es la función Id.

2. Demostrar que una homografía $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ aplica $\widehat{\mathbb{R}}$ en $\widehat{\mathbb{R}}$ si y solo si se puede escribir con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

3. (a) Hallar homografías que transformen
   i. los puntos $0, i, -i$ en $0, 1, \infty$;
   ii. los puntos $0, i, -i$ en $1, -1, 0$.

   (b) Probar que la imagen de $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ por la primer homografía del ítem anterior es la recta dada por $\{\mathrm{Re}(z) = 1\}$ en $\widehat{\mathbb{C}}$. ¿Cuál es la imágen por esta homografía de $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$?

4. Sea $\mathbb{I}$ el eje imaginario. Hallar todas las homografías T que verifican simultáneamente
$$T(\hat{\mathbb{R}}) = \hat{\mathbb{I}}, \quad T(\hat{\mathbb{I}}) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\} \quad \text{y} \quad T(\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}) = \hat{\mathbb{R}}.$$

5. **Definición**: Dados z_1, z_2, z_3, z_4 puntos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$, se define la *razón doble*
$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} \cdot \frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2} \in \mathbb{C}.$$
Notar que (z_1, z_2, z_3, z_4) es la imagen de z_1 por la homografía T tal que $T(z_2) = 0$, $T(z_3) = 1$ y $T(z_4) = \infty$.

   (a) Demostrar que z_1, z_2, z_3, z_4 están en una recta o circunferencia si y solo si $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$.

   (b) Probar que si T es una homografía entonces $\big(T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)\big) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$.

6. Decidir en cada caso si existe una homografía que transforme:

   (a) la circunferencia $|z| = 3$ en la circunferencia $|z - i| = 2$, 1 en 0 y 9 en $2i$;

   (b) la circunferencia $|z| = 3$ en la circunferencia $|z - i| = 2$, 1 en 0 y $7i$ en $-3i$;

   (c) la circunferencia $|z| = 3$ en la circunferencia $|z - i| = 2$, 1 en 0 y 9 en $-3i$.

   En caso afirmativo, hallar una tal homografía.

7. Sea $f : B(0,1) \to B(0,1)$ holomorfa. Probar que si existen dos números complejos distintos a y b en $B(0,1)$ tales que $f(a) = a$ y $f(b) = b$, entonces $f(z) = z$ para todo z en $B(0,1)$.

8. Hallar todas las funciones holomorfas $f : B(0,1) \to B(1,4)$ que verifican simultáneamente $f(0) = 3$ y $f(\frac{1}{2}) = 1$.

9. Sean g y h dos automorfismos de $B(0,1)$. Probar que si g y h coinciden en dos puntos distintos de $B(0,1)$, entonces $g(z) = h(z)$ para todo z en $B(0,1)$.

10. Caracterizar todos los automorfismos de $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0, \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

11. Caracterizar todos los automorfismos de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$.

12. Caracterizar todos los automorfismos de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

13. Sean Ω un abierto simplemente conexo del plano, , $\Omega \neq \mathbb{C}$, y sea $f : \Omega \to \Omega$ holomorfa. Probar que si existen dos números complejos distintos a y b en Ω tales que $f(a) = a$ y $f(b) = b$, entonces $f(z) = z$ para todo z en Ω.

14. Sean Ω un abierto simplemente conexo del plano y sean g y h dos automorfismos de Ω. Probar que si g y h coinciden en dos puntos distintos de Ω, entonces $g(z) = h(z)$ para todo z en Ω.