Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Matemática

Análisis Complejo

Práctica N°7.

1. Para $n \in \mathbb{N}$, sea
$$P_n(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!}.$$
Demostrar que para todo compacto $K \subset \mathbb{C}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, P_n no tiene ceros en K.

2. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa para todo $n \in \mathbb{N}$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $f_n \to f$ uniformemente sobre compactos de Ω. Probar que $e^{f_n} \to e^f$ uniformemente sobre compactos de Ω.

3. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa para todo $n \in \mathbb{N}$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $f_n \to f$ uniformemente sobre compactos de Ω. Probar que si $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega$ es tal que $z_n \to z_0 \in \Omega$, entonces $f_n(z_n) \to f(z_0)$.

4. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa para todo $n \in \mathbb{N}$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $f_n \to f$ uniformemente sobre compactos de Ω. Para $n \in \mathbb{N}$, sea
$$g_n = \frac{f_1 + \cdots + f_n}{n}.$$
Probar que $g_n \to f$ uniformemente sobre compactos de Ω.

5. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo, $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa para todo $n \in \mathbb{N}$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $f_n \to f$ uniformemente sobre compactos de Ω. Probar que si para todo $n \in \mathbb{N}$, f_n es un polinomio de grado menor o igual a d, entonces f es un polinomio de grado menor o igual a d.

6. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa para todo $n \in \mathbb{N}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ no idénticamente nula tal que $f_n \to f$ uniformemente sobre compactos de Ω y $z_0 \in \Omega$ con $f(z_0) = 0$. Probar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ y una sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}, n\geq n_0} \subset \Omega$ tal que $z_n \to z_0$ y $f_n(z_n) = 0$ para todo $n \geq n_0$.

7. Para $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f_n(z) = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$. Probar que $f_n \to e^z$ uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}$.

8. Para $R > 0$, sea $C_R = \{z \in \mathbb{C} \mid -R \leq \mathrm{Re}(z) \leq R, -\frac{\pi}{2} \leq \mathrm{Im}(z) \leq \frac{\pi}{2}\}$. Para $n \in \mathbb{N}$, sea
$$f_n(z) = e^{1+z+\cdots+\frac{z^n}{n!}}.$$
Demostrar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $|f_n(z)| \geq \frac{1}{2}$ para todo $z \in C_R$.

9. (a) Probar que para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} = \left(\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)} \right)^2.$$

   (b) Calcular $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

10. Probar que para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z},\, n \neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) = \pi \operatorname{cotg}(\pi z).$$

11. Probar que

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{2}.$$

12. Para $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < 1$, probar que

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + z^{2^n} \right) = \frac{1}{1-z}.$$

13. Probar que

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^n)$$

define una función holomorfa en $B(0,1)$. Hallar los ceros de esta función y sus multiplicidades.

14. Probar que

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 z - 1}{n^2 z + 1}$$

define una función holomorfa en $\{\operatorname{Re}(z) > 0\}$. Hallar los ceros de esta función y sus multiplicidades. Probar que esta función no puede extenderse de manera holomorfa a un abierto que contenga al origen.

15. Probar que

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{z}{2^n} \right)$$

define una función entera. Hallar los ceros de esta función y sus multiplicidades.

16. Probar que

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{z} \operatorname{sen}\left(\frac{z}{n^2} \right)$$

define una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ que tiene en 0 una singularidad evitable.

17. Probar que
$$\pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \operatorname{sen}(\pi z).$$

18. Probar que
$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$
define una función entera.

19. Hallar una f entera que verifique simultáneamente que 0 es un cero simple de f, $n^{1/3}$ es un cero doble de f para todo $n \in \mathbb{N}$, f no tiene otros ceros en $\mathbb{C}$ y $f'(0) = 2$.