Análisis Complejo

Práctica N°1.

1. Expresar los siguientes números complejos en la forma $a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$:

(i) $(i+1)(i-1)(i+3)$,	(ii) $(3-2i)^2$,	(iii) $\frac{1}{-1+3i}$,
(iv) $\frac{1+i}{i}$,	(v) $\frac{2+i}{2-i}$,	(v) $\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^3$.

2. Sean $w, z \in \mathbb{C}$. Demostrar que:

   (a) $\overline{w+z} = \overline{w} + \overline{z}$.

   (b) $\overline{wz} = \overline{w}\ \overline{z}$.

   (c) Si $z \neq 0$, $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$.

   (d) $|wz| = |w|\,|z|$.

   (e) Si $z \neq 0$, $|z^{-1}| = |z|^{-1}$.

   (f) $|\overline{z}| = |z|$.

   (g) $z\overline{z} = |z|^2$.

   (h) $-|z| \leq \mathrm{Re}(z) \leq |z|$ y $-|z| \leq \mathrm{Im}(z) \leq |z|$.

   (i) $|w+z|^2 = |w|^2 + |z|^2 + 2\mathrm{Re}(w\overline{z})$ y $|w-z|^2 = |w|^2 + |z|^2 - 2\mathrm{Re}(w\overline{z})$.

   (j) $|w+z|^2 + |w-z|^2 = 2\big(|w|^2 + |z|^2\big)$.

   (k) $|w+z| \leq |w| + |z|$.

   (l) $|w-z| \geq |w| - |z|$.

   Interpretar geométricamente la propiedad (j), también conocida como “Ley del paralelogramo”.

3. Describir geométricamente los siguientes subconjuntos de $\mathbb{C}$:

(i) $|z-i+3| = 5$,	(ii) $|z-i+3| \leq 5$,
(iii) $\mathrm{Re}(2z+3) \geq 0$,	(iv) $\mathrm{Im}((1+2i)z) \geq 1$.

4. Demostrar que si $z_0 \in \mathbb{C}$ es raíz de $a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$, entonces $\overline{z}_0 \in \mathbb{C}$ es raíz de $\overline{a}_nX^n + \overline{a}_{n-1}X^{n-1} + \cdots + \overline{a}_0 = 0$. Deducir que si $P(X)$ es un polinomio con coeficientes reales y $z_0 \in \mathbb{C}$ es raíz de $P(X)$, entonces $\overline{z}_0 \in \mathbb{C}$ también lo es, y con la misma multiplicidad.

5. (a) Pasar de la forma $a+ib$ a la forma polar:

$$\text{(i)} \quad 1+i, \qquad \text{(ii)} \quad -5i, \qquad \text{(iii)} \quad -3, \qquad \text{(iv)} \quad \tfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}.$$

   (b) Pasar de la forma polar a la forma $a+ib$:

$$\text{(i)} \quad 3e^{i\frac{\pi}{4}}, \qquad \text{(ii)} \quad e^{-i\pi}, \qquad \text{(iii)} \quad e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

6. (a) Para $n = 2,3,4,5$, dibujar todos los números complejos z tales que $z^n = 1$.
   (b) Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Demostrar que hay exactamente n números complejos distintos tales que $z^n = \alpha$.

7. Hallar todas las soluciones en $\mathbb{C}$ de la ecuación $iz^2 + (3-i)z - (1+2i) = 0$.

Funciones exponencial y trigonométricas

8. **Definición**: Para $z \in \mathbb{C}, z = a+ib$, se define $e^z = e^a \cdot (\cos b + i \operatorname{sen} b)$.
   (a) Demostrar que para todos $w, z \in \mathbb{C}$, $e^{w+z} = e^w e^z$.
   (b) Demostrar que para todo $z \in \mathbb{C}$, $e^{-z} = (e^z)^{-1}$ y $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$.
   (c) Describir el conjunto de los $z \in \mathbb{C}$ tales que $e^z = 1$.
   (d) Demostrar que si $e^z = e^w$, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $z = w + 2k\pi i$.

9. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$.
   (a) Hallar la imagen por f del conjunto $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Im}(z) < 2\pi\}$.
   (b) Hallar la imagen por f del primer cuadrante.
   (c) Mostrar que la imagen de la recta $\{t + it \mid t \in \mathbb{R}\}$ es una espiral.

10. **Definición**: Para $z \in \mathbb{C}$, se define $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ y $\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$.
    (a) Demostrar que para $z \in \mathbb{R}$, estas definiciones de cos y sen coinciden con las habituales.
    (b) Demostrar que para todo $z \in \mathbb{C}$, $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$ y $e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$.
    (c) Demostrar que para todo $z \in \mathbb{C}$, $\cos(\overline{z}) = \overline{\cos(z)}$ y $\operatorname{sen}(\overline{z}) = \overline{\operatorname{sen}(z)}$.
    (d) Demostrar que para todo $z \in \mathbb{C}$ y todo $k \in \mathbb{Z}$, $\cos z = \cos(z+2k\pi)$ y $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(z+2k\pi)$.
    (e) Hallar todas las soluciones en $z \in \mathbb{C}$ de la ecuación $\cos z = 0$ y de la ecuación $\operatorname{sen} z = 0$.

11. (a) Probar que $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$ son funciones suryectivas de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$.
    (b) Hallar todas las soluciones de la ecuación $\cos z = \frac{5}{4}$.

12. Sean $a, b, b' \in \mathbb{R}$. Probar que si $|b| < |b'|$, entonces $|\cos(a+bi)| < |\cos(a+b'i)|$ y $|\operatorname{sen}(a+bi)| < |\operatorname{sen}(a+b'i)|$.