0.1. Análisis Complejo-Leonardo Lanciano- Clase 16/8/23- Funciones Holomorfas, Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Comenzamos recordando la definición de función holomorfa.

Definición 0.1.1. Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $z_0 \in U$. Consideremos $f : U \mapsto \mathbb{C}$ una función.

1. Diremos que f es derivable compleja en z_0 si:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \text{ existe y no depende de la manera de acercarse de } h \text{ a } 0.$$

2. Diremos que f es holomorfa en U si es derivable compleja en z_0 para todo $z_0 \in U$.

3. Una función f es **entera** si es holomorfa en todo $\mathbb{C}$.

Ejercicio 0.1.2. *Sea $m : [0,1] \to \mathbb{C}$ una función continua. Demostrar que:*

$$F : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ dada por } F(z) = \int_0^1 e^{izt} m(t) dt \text{ es una función entera y calcular } F'(z).$$

Demostración. Este ejercicio está puesto para practicar una vez el límite de la derivabilidad por definición. Luego, en este caso sin un teorema de paso al límite bajo integral no nos va a salir la cuenta directo, por lo que busquemos un candidato. Lo primero que se hace en este caso es pensar que pasaría si todo fuera real. Si ese fuera el caso la regla de leibniz nos permite meter la derivada dentro de la integral y en consecuencia,

$$\text{debería pasar que: } F'(z) = \int_0^1 ite^{izt} m(t) dt.$$

Ahora que tenemos una intuición de lo que debería pasar, probemoslo por definición.

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F(z_0 + h) - F(z_0)}{h} - \int_0^1 ite^{iz_0t} m(t) dt \right| &= \left| \int_0^1 \frac{(e^{i(z_0+h)t} - e^{iz_0t}) m(t)}{h} - ite^{izt} m(t) dt \right| \\
&= \left| \int_0^1 m(t) \left(\frac{e^{i(z_0+h)t} - e^{iz_0t}}{h} - ite^{iz_0t} \right) dt \right| \\
&\leqslant \max_{t \in [0,1]} |m(t)| \left| \int_0^1 \frac{e^{i(z_0+h)t} - e^{iz_0t}}{h} - ite^{iz_0t} dt \right| \\
&\leqslant \max_{t \in [0,1]} |m(t)| \int_0^1 \left| e^{itz_0} \right| \left| \frac{e^{iht} - 1}{h} - it \right| dt \\
&\leqslant \max_{t \in [0,1]} |m(t)| \cdot \max_{t \in [0,1]} |e^{itz_0}| \int_0^1 \left| \frac{e^{iht} - 1}{h} - it \right| dt.
\end{aligned}$$

Ahora, veamos rápidamente que la expresión de la integral tiende a cero. Supongamos que $|h| \leqslant 1$ para simplificar la cuenta.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left| \frac{e^{iht} - 1}{h} - it \right| dt = \int_0^1 \left| \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iht)^n}{n!} - 1 - ith}{h} \right| dt \leqslant \int_0^1 \sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{t^n h^{n-1}}{n!} \right| dt = h \int_0^1 \sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{h^{n-2}}{n!} \right| dt \\
\leqslant he^h \leqslant he.
\end{aligned}$$

Juntando todo tenemos que:

$$\left| \frac{F(z_0 + h) - F(z_0)}{h} - \int_0^1 ite^{iz_0t} m(t) dt \right| \leqslant \max_{t \in [0,1]} |m(t)| \cdot \max_{t \in [0,1]} |e^{itz_0}| he \to 0.$$

Por lo que hemos probado la derivabilidad. □

Teorema 0.1.3. *Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$. Sea $f : U \to \mathbb{C}$ dada por $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ con $u, v : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Entonces son equivalentes:*

1. *f es derivable en z_0.*

2. *u, v son diferenciables en z_0 y se tiene que:*

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \text{ y } u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0).$$

El siguiente ejercicio prueba una de las tantas versiones del teorema de la función inversa para funciones holomorfas. Más adelante en la materia veremos que las hipótesis pueden ser relajadas.

Ejercicio 0.1.4. *Supongamos que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función entera, biyectiva y que su inversa es diferenciable. Probar que $f^{-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa.*

Demostración. La gracia con algunos de estos ejercicios es utilizar apropiadamente la regla de la cadena. En general si nos dan la hipótesis de diferenciable es para poder derivar en cierto punto y aprovechar esa propiedad. Primero hacemos un recuerdo.

Observación 0.1.5. Si $A \in GL(2, \mathbb{C})$ es $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \lambda \end{pmatrix}$ entonces $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \lambda & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$

Luego, la idea será utilizar la vuelta del teorema anterior. Para esto, supongamos que $f = u + iv$ y $f^{-1} = h + ig$. Como f^{-1} es diferenciable, tanto h como g lo son y luego bastará con ver que h y g cumplen con las ecuaciones de Cauchy Riemann. Notemos que dado $z \in \mathbb{C}$ se tiene que:

$$f(f^{-1}(z)) = z \Rightarrow D_f(f^{-1}(z)) D_{f^{-1}}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pasando en limpio tenemos que:

$$\begin{pmatrix} u_x(f^{-1}(z)) & u_y(f^{-1}(z) \\ v_x(f^{-1}(z)) & v_y(f^{-1}(z)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_x(z) & h_y(z) \\ g_x(z) & g_y(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, como f es entera, en particular cumple con las condiciones de cauchy riemann por lo que se tiene lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} u_x(f^{-1}(z)) & u_y(f^{-1}(z) \\ -u_y(f^{-1}(z)) & u_x(f^{-1}(z)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_x(z) & h_y(z) \\ g_x(z) & g_y(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia notando que una matríz es la inversa de la otra, por la fórmula de la inversa para matrices de 2×2 se tiene que si $\Delta = \det \begin{pmatrix} u_x(f^{-1}(z)) & u_y(f^{-1}(z) \\ -u_y(f^{-1}(z)) & u_x(f^{-1}(z)) \end{pmatrix}$ entonces:

1. $\dfrac{u_x(f^{-1}(z))}{\Delta} = h_x(z) = g_y(z)$.

2. $g_x(z) = \dfrac{u_y(f^{-1}(z))}{\Delta} = -h_y(z)$.

En consecuencia se tiene que se cumplen las ecuaciones de Cauchy Riemann y por ende $f^{-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa. □

Pasamos a otro ejercicio.

Ejercicio 0.1.6. *Hallar todas las funciones enteras $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tales que:*

$$f(x+iy) = f(x) + if(y) \ \forall\ x, y \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Lo primero que hay que hacer en este tipo de ejercicio es escribir a $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$. Ahora una vez considerada esta escritura, todo se tratara de utilizar la propiedad de f para hacer el despeje necesario. Notemos que:

$$\begin{aligned} u(x,y) + i(v(x,y)) = f(x+iy) = f(x) + if(y) = u(x,0) + iv(x,0) + i(u(y,0) + iv(y,0)) \\ \Rightarrow u(x,y) + iv(x,y) = (u(x,0) - v(y,0)) + i(v(x,0) + u(y,0)). \end{aligned}$$

En consecuencia tenemos las siguientes dos condiciones:

1. $u(x,y) = u(x,0) - v(y,0) = a(x) - b(y)$.
2. $v(x,y) = v(x,0) + u(y,0) = b(x) + a(y)$.

Lo siguiente será a partir de las dos condiciones anteriores encontrar dichas funciones. Recordar que por las ecuaciones de Cauchy-Riemann tenemos que $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$. En consecuencia se tiene que:

1. $a'(y) = u_y(y,0) = v_y(x,y) = u_x(x,y) = u_x(x,0) = a'(x) \Rightarrow a(x) = c_1x + c_2$ puesto que sus derivadas son constantes.
2. $b'(x) = v_x(x,0) = v_x(x,y) = -u_y(x,y) = b'(y) \Rightarrow b(x) = c_3x + c_4$

Juntando todo tenemos que:

1. $u(x,y) = c_1x - c_3y + c_2 - c_4$
2. $v(x,y) = c_3x + c_1(y) + c_2 + c_4$

Notando que inmediatamente de la ecuación inicial se desprende que $f(0) = 0$ tenemos que $c_2, c_4 = 0$ y en consecuencia se tiene que:

$$f(x+iy) = c_1x - c_3y + ic_3x + ic_1y = (c_1 + ic_3)(x+iy) \Rightarrow f(z) = \alpha z,\ \alpha \in \mathbb{C}.$$

Acá normalmente habría que chequear que lo que nos da es una función entera pero en este caso una lineal claramente lo es. □

Ejercicio 0.1.7. *Sea $q \in \mathbb{R}$ y sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable de tal que $\nabla F(p) \neq 0$ para todo $p \in F^{-1}(q) \neq \emptyset$. Hallar todas las funciones enteras $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ que verifican*

$$F\big(u(x,y), v(x,y)\big) = q.$$

Demostración. La idea al igual que con el de la función inversa es utilizar la regla de la cadena de manera apropiada. Para esto, en primer lugar observemos que $Im(f) \subseteq F^{-1}(q) \neq \emptyset$. Ahora bien, si derivamos a ambos lados la expresión tenemos que:

$$(F_x(u(x,y)), F_y(u(x,y))) \begin{pmatrix} u_x(x,y) & u_y(x,y) \\ v_x(x,y) & v_y(x,y) \end{pmatrix} = (0,0).$$

Luego,como f es entera, por las ecuaciones de Cauchy Riemann tenemos que:

$$(F_x(u(x,y)), F_y(u(x,y))) \begin{pmatrix} u_x(x,y) & u_y(x,y) \\ -u_y(x,y) & u_x(x,y) \end{pmatrix} = (0,0). \tag{1}$$

Luego, como $\nabla F(p) \neq 0$ para todo $p \in F^{-1}(q)$ y $Im(f) \subseteq F^{-1}(q)$ se tiene que:

$$(F_x(u(x,y)), F_y(u(x,y))) \neq (0,0),$$

por lo que el sistema de ecuaciones presentado de forma matricial en la ecuación (1) tiene solución no trivial. Una opción muy engorrosa para este momento es multiplicar y considerar ambas ecuaciones triangulando el sistema pero no es cómodo. Sin embargo, si pensamos de manera mas conceptual, es pensar que al haber solución no trivial, esa matriz no puede ser inversible y en consecuencia su determinante es cero. Luego, tomando determinante tenemos que:

$$u_x^2(x,y) + u_y^2(x,y) = 0 \Rightarrow u_x(x,y) = 0\ u_y(x,y) = 0\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Así, tenemos que u es constante, pero luego v es constante y en consecuencia tenemos que f puede ser cualquier función que sea constantemente cualquier valor de $F^{-1}(q)$(vía la identificación $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$. □