0.1. Análisis Complejo-Leonardo Lanciano- Clase 24/04/23- Teorema de Los residuos y CW

Teorema 0.1.1. *(C-W) Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $z_0 \in U$. Consideremos $f : U \setminus \{ z_0 \} \to \mathbb{C}$ función holomorfa tal que z_0 es una singularidad esencial de f. Entonces para todo ε se tiene que:*

$$\overline{f(D_\varepsilon(z_0) \setminus \{ z_0 \})} = \mathbb{C}.$$

Introducimos el siguiente ejercicio que había quedado de la clase anterior.

Ejercicio 0.1.2. *Demostrar que si $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ es biyectiva y holomorfa con inversa continua entonces 0 no puede ser una singularidad esencial de f.*

Demostración. Supongamos que 0 es una singularidad esencial. En general para este tipo de condiciones, se utiliza lo único que se tiene a mano que es el teorema de Cassoratti-Weierstrass. Sabemos que para todo $\varepsilon > 0$, $f(\mathbb{D}_\varepsilon(z_0) \setminus \{ z_0 \})$ es denso en $\mathbb{C}$. Luego, sea $V = ((D_1(3))^\circ)$ (notar que estos números están elegidos para estar lejos del cero, pero se puede agarrar cualquier otro). Observemos que como V es abierto f es un homeomorfismo, entonces $f(V)$ es abierto. Más aún, para ε lo suficientemente chico, por ejemplo $\frac{1}{2}$, tenemos que $f(D_{\frac{1}{2}}(0))$ es denso en $\mathbb{C}$. De esta forma tenemos que:

$$\varnothing = f(V \cap D_{\frac{1}{2}}(0)) = f(V) \cap f(D_{\frac{1}{2}}(0)) \neq \varnothing.$$

Lo cual es una contradicción que vino de suponer que la singularidad podía ser esencial. □

Ahora introducimos la noción de singularidades en el infinito. Para los que por alguna razón cursaron antes geometría proyectiva, la idea detrás de extender las definiciones de singularidad al infinito es simplemente considerar la carta $\frac{1}{z}$ para la esfera de Riemann (Para el que esto no signifique nada, ignorar el comentario)

Definición 0.1.3. Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa y sea z_0 una singularidad aislada de f. Definimos el residuo de f en z_0 como:

$$Res(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\, dz.$$

Donde C es una circunferencia de radio lo suficientemente pequeño tal que z_0 es la única singularidad de f en $Int(C)$. Notar que si la singularidad es evitable, entonces el residuo da 0.

Observación 0.1.4. Notemos que, por lo visto en la teórica, esto coincide con uno de los coeficientes que acompaña el desarrollo de Laurent de f en z_0. Es decir, dada f como en la definición anterior, sabemos que existe una corona $A = \{ z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < R_2 \}$ tal que:

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (z - z_0)^k, \text{ donde } a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}.$$

De esta forma, se tiene que $Res(f, z_0) = a_{-1}$.

Recuerdo el siguiente ejercicio de la practica:

Proposición 0.1.5. *Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Sea $z_0 \notin \Omega$ un polo de orden k de f y $g : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por $g(z) = (z - z_0)^k f(z)$. Entonces se tiene que:*

$$Res(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} g^{(k-1)}(z)$$

Ejercicio 0.1.6. *Consideremos la función $f(z) = \pi \dfrac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi \cot(z)$.*

- *Hallar y clasificar todas las singularidades de f.*
- *Para cada $z_0 \in Sing(f)$ calcular $Res(f, z_0)$.*

Demostración. Es claro que las singularidades de f se encuentran en los puntos en donde se anula $\sin(\pi z)$. De esta forma, tenemos que $Sing(f) = \mathbb{Z}$. Notar que estas no son evitables (sino sale tomando límite). Por lo que resta ver si son polos o esenciales. Ahora bien, si nos inspiramos en que $\frac{\sin(z)}{z} \to 1$ notemos que para cada $k \in \mathbb{N}$ es:

$$\begin{aligned}\lim_{z\to k}(z-k)\cdot\pi\cdot\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} &= \cdot\lim_{z\to k}\cos(\pi z)\cdot\frac{\pi(z-k)}{\sin(\pi z)} = \lim_{z\to k}\cos(\pi z)\cdot\frac{\pi(z-k)}{\sin(\pi(z-k)+k\pi)}\\ &= \lim_{z\to k}\cos(\pi z)\cdot\frac{\pi(z-k)}{\sin(\pi(z-k))}(-1)^k = (-1)^k\cdot(-1)^k = 1.\end{aligned}$$

Por lo que todos son polos simples y más aún, por la proposición anterior tenemos que para todo $z_0 \in Sing(f)$ es:

$$Res(f, z_0) = 1.$$

□

Sin embargo, uno se pregunta, para qué es importante estudiar los residuos, que información me dan los residuos de una función sobre la misma?. Van a demostrar en la teórica el siguiente teorema, que utilizaremos en el resto de la clase:

Teorema 0.1.7. *(Teorema de los Residuos) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo y f holomorfa en Ω salvo en sus finitas singularidades $z_1, \ldots, z_r$ que son todos polos de algun orden. Consideremos $\gamma \subseteq \Omega$ una curva cerrada simple orientada positivamente. Entonces vale que:*

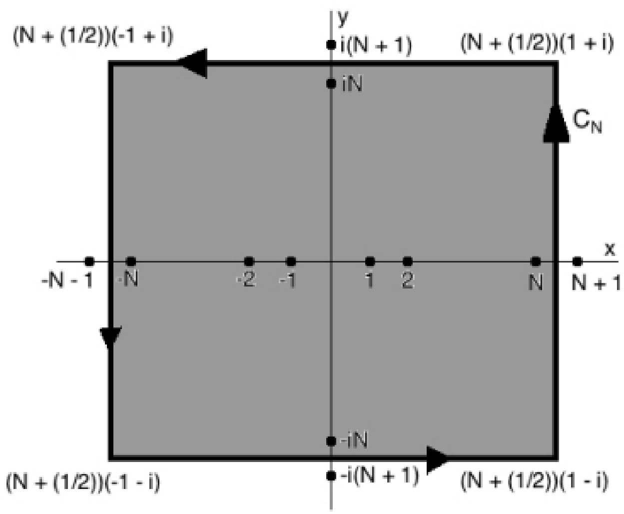
$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{z_j \in Int(\gamma)} Res(f, z_j).$$

Pasamos a dar un ejemplo.

Ejercicio 0.1.8. *Para cada $N \in \mathbb{N}$ consideremos C_N el cuadrado de vértices:*

1. $(N + \frac{1}{2})(1 + i)$.
2. $(N + \frac{1}{2})(1 - i)$.
3. $(N + \frac{1}{2})(-1 + i)$.
4. $(N + \frac{1}{2})(-1 - i)$.

Orientado positivamente. Es decir, la curva dada por el siguiente dibujo:



Para cada $n \in \mathbb{N}$ calcular $\int_{C_n} \pi\cot(\pi z)dz$.

Demostración. Notemos que por lo que probamos en el ejercicio anterior, tenemos que: $Sing(\cot(\pi z)) = \mathbb{Z}$ y para cada $k \in \mathbb{Z}$ es $Res(\pi\cot(\pi z), k) = 1$. En consecuencia por el teorema de los residuos, tenemos que:

$$\int_{C_n} \pi\cot(\pi z)dz = \sum_{k\in Int(C_N)} Res(\pi\cot(\pi z), k) = \sum_{k\in Int(C_N)} 1 = 2k+1.$$

□

Ahora mencionamos un lema técnico sobre la cotangente que no demostraremos pero comentaremos la idea de como sale.

Lema 0.1.9. *Sea C_N el cuadrado del ejercicio anterior. Entonces existe $A \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $|\pi Cot(\pi z)| \leqslant A$ $\forall z \in C_N$, $\forall N \in \mathbb{N}$. (Es decir, la constante no depende de N).*

Demostración. La idea de la demostración simplemente es hacer la cuenta escribiendo a $z \in C_N$ como: $z = x + iy$ y partiendo en los casos

1. $|y| > \dfrac{1}{2}$. (Sale anotando a los senos y cosenos con forma exponencial).
2. $|y| \leqslant \dfrac{1}{2}$. (Sale notando que en este caso estamos en la parte vertical y entonces $z = N + \frac{1}{2} + iy$ o $z = -N - \frac{1}{2} + iy$, ambos casos son análogos).

□

A partir de esto podemos probar el siguiente teorema:

Teorema 0.1.10. *(Teorema de Sumación) Sea $f(z)$ holomorfa en $\mathbb{C}$ salvo en un conjunto finito de singularidades $z_1, \dots, z_r \notin \mathbb{Z}$ que son todos polos de algún orden o evitables. Supongamos además que $|f(z)| < \dfrac{M}{|z|^k}$ para $k > 1$, para todo $z \in C_N$ y $N \in \mathbb{N}$ (Es decir que M no depende de N). Entonces se cumple la siguiente fórmula:*

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} f(j) = -\sum_{j=1}^{r} Res(f(z)\cdot\pi\cot(\pi z), z_r).$$

Demostración. Recordar que por lo probado anteriormente, tenemos que los polos de $\pi\cot(\pi z)$ están todos en los números enteros y son todos simples.

Observar que el conjunto de singularidades del producto de dos funciones es contenido en la unión de ambos conjuntos de singularidades. Luego tenemos que:

$$Sing(f(z)\cdot\pi\cot(\pi z)) \subseteq Sing(f) \cup Sing(\cot(\pi z)) = \mathbb{Z} \cup \{z_1, \dots, z_r\}.$$

Notar que, sin pérdida de generalidad podemos suponer que vale el igual, agregando al resto de los puntos como singularidades evitables (tienen residuo 0 y no afectan en la cuenta). En particular, al ser disjuntos ($z_1, \dots, z_r \notin \mathbb{Z}$) el orden de estos como polos no puede aumentar, a lo sumo disminuye.

En particular, como $z_1, \dots, z_r \notin \mathbb{Z}$ tenemos que para $j \in \mathbb{Z}$:

$$Res(f(z)\cdot\pi\cot(\pi z), j) = \lim_{z\to j}(z-j)\pi\cot(\pi z)f(z) = f(j).$$

Observar que como el conjunto de singularidades de f es finito, existe N_1 suficientemente grande tal que $z_1, \dots, z_r \in Int(C_{N_1})$ y en consecuencia para $N > N_1$ es:

$$\begin{aligned}\int_{C_N} f(z)\cdot\pi\cot(\pi z)dz &= \sum_{j=-N}^{N} Res(f(z)\cdot\pi\cot(\pi z), j) + \sum_{j=1}^{r} Res(f(z)\cdot\pi\cot(\pi z), z_r) \\ &= \sum_{j=-N}^{N} f(j) + \sum_{j=1}^{r} Res(f(z)\cdot\pi\cot(\pi z), z_r).\end{aligned}$$

Por comodidad, sea $\delta = \sum_{j=1}^{r} Res(f(z) \cdot \pi \cot(\pi z), z_r)$. Estaría bueno que la integral tienda a cero, pasar restando y tomar límite. Para esto observar que, para $N > N_1$ es:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{C_N} f(z) \cdot \pi \cot(\pi z) dz \right| &\leqslant Long(C_N) \max_{z \in C_N} |f(z) \pi \cot(\pi z)| \\
&\leqslant (8N+4) \max_{z \in C_N} |\pi \cot(\pi z)| \cdot \max_{z \in C_N} |f(z)| \\
&\leqslant_{0.1.9} (8N+4) \cdot A \cdot \max_{z \in C_N} \frac{M}{|z^k|} \\
&\leqslant (8N+4) \cdot A \cdot \frac{M}{N^k} \to 0.
\end{aligned}$$

Donde ese último límite es cero ya que $k > 1$. De esta manera tomando límite a ambos lados se tiene que:

$$0 = \sum_{j=-N}^{N} f(j) + \delta.$$

Por lo que se sigue el resultado. $\square$

Ejercicio 0.1.11. *Sean $a, b \in \mathbb{C}$ tal que $\mathfrak{Re}(a) > 0$, $\mathfrak{Re}(b) > 0$ y $a \neq \overline{b}$. Calcular la siguiente integral:*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + \overline{b^2})} dx.$$

Demostración. La idea de este problema es utilizar el teorema de los residuos. Para esto consideramos un contorno apropiado que contenga alguna de las singularidades de nuestra función. . Así, sea $f(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)(z^2 + \overline{b^2})}$. Observar que las singularidades de f están en $\pm ia$ y $\pm i\overline{b}$ y más aún como $\mathfrak{Re}(a) > 0$ y $\mathfrak{Re}(b) > 0$ tenemos que ia e $i\overline{b}$ están en el semiplano superior $\mathbb{C}^+$. Luego, utilizando la estrategia de completar con un semicírculo consideramos el intervalo $[-R, R]$ y la curva γ_R la semicircunferencia de radio R. De esta manera, para R suficientemente grande, tenemos por el teorema de los residuos que:

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + \overline{b^2})} dx + \int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2 + a^2)(z^2 + \overline{b^2})} dz = 2\pi i \left(Res(f, ia)) + Res(f, i\overline{b}) \right)$$

Puesto que las otras singularidades de f se encuentran fuera de nuestro contorno. De esta manera, alcanza con ver que:

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2 + a^2)(z^2 + \overline{b^2})} dz = 0.$$

Y luego tendremos que:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 2\pi i \left(Res(f, ia) + Res(f, i\overline{b}) \right).$$

Para esto, hacemos lo de siempre:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| = \left| \int_0^{\pi} \frac{Rie^{i\theta}}{(R^2 e^{i\theta} + a^2)(R^2 e^{i\theta} + \overline{b}^2)} \right| &\leqslant R \int_0^{\pi} \left| \frac{1}{(R^2 e^{i\theta} + a^2)(R^2 e^{i\theta} + \overline{b}^2} \right| \\
&\leqslant R \int_0^{\pi} \left| \frac{1}{(R^2 e^{i\theta} + a^2)(R^2 e^{i\theta} + \overline{b}^2)} \right| \\
&\leqslant R \int_0^{\pi} \frac{1}{|(R^2 - |a|^2)|(R^2 - |\overline{b}^2|)} \\
&= \pi \frac{R}{|(R^2 - |a|^2)|(R^2 - |\overline{b}^2|)} \to 0.
\end{aligned}$$

En consecuencia tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) = 2\pi i \left(Res(f, ia) + Res(f, i\bar{b}) \right) \tag{1}$$

Notando que son ambos polos simples y luego los residuos se calculan como un límite tenemos que:

$$\begin{aligned} Res(f, ia) &= \lim_{z \to ia} \frac{z - ia}{(z^2 + \bar{b}^2)(z^2 + a^2)} = \lim_{z \to ia} \frac{z - ia}{(z^2 + \bar{b}^2)(z - ia)(z + ia)} = \lim_{z \to ia} \frac{1}{(z^2 + \bar{b}^2)(z + ia)} \\ &= \frac{1}{2ia(\bar{b}^2 - a^2)}. \end{aligned}$$

De manera análoga, se ve que:

$$Res(f, i\bar{b}) = \frac{1}{(2i\bar{b})(a^2 - \bar{b}^2)}.$$

De esta manera, computando estos residuos en la ecuación (1) y simplificando tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \frac{\pi}{a\bar{b}(a + \bar{b})}.$$

□