0.1. Análisis Complejo- Leonardo Lanciano- Teorema de Rouché y de la Aplicación Abierta

La idea de la clase es hacer ejercicios de teorema de Rouché y ver algunas aplicaciones del teorema de la aplicación abierta.

Teorema 0.1.1. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto conexo, y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa no constante. Entonces f es abierta.*

A partir de esto pasamos a dar un ejercicio.

Ejercicio 0.1.2. *Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa y no constante tal que $f(0) = 0$. Demostrar que para todo rayo Γ centrado en el origen se tiene que $Im(f) \cap \Gamma \setminus \{0\} \neq \emptyset$.*

Demostración. Como $f(0) = 0$ y f es abierta entonces hay una bola centrada en el origen contenida en la imagen. Luego una bola centrada en el origen interseca no trivialmente a todo rayo y el resultado se sigue. □

Ahora hacemos un ejercicio bien simple para mostrar el poder del teorema de la aplicación abierta.

Ejercicio 0.1.3. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que su imagen está contenida en unión de numerables parabolas (Resp Cúbicas/ Ceros de polinomios). Demostrar que f es constante.*

Demostración. Supongamos que f no es constante, observar que por el teorema de la aplicación abierta, como Ω es abierto, $Im(f)^\circ \neq \emptyset$. Sin embargo, observar que cada parabola tiene interior vacío y $\mathbb{C}$ es completo. Luego, por el teorema de Baire la unión numerable de las parábolas tiene interior vacío. Lo cual lleva a una contradicción, que vino de suponer que f no era constante. □

Ahora pasamos a hacer ejercicios del teorema de Rouché.

Teorema 0.1.4. *(Rouché) Sea $\gamma \subseteq \mathbb{C}$ una curva cerrada simple y sea $D = Int(\gamma)$. Sean $f, g : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dos funciones holomorfas tal que $D \subseteq \Omega$. Si vale que:*

$$|g(z)| < |f(z)| \; \forall z \in \gamma.$$

Entonces f y $f + g$ tienen la misma cantidad de ceros contados con multiplicidad en D.

Pasamos a dar un ejercicio de este tema.

Ejercicio 0.1.5. *Supongamos que $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$ es un polinomio de grado n con coeficientes complejos. Probar que el módulo de sus raíces es menor o igual que*

$$1 + \max \left\{ \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|}, \cdots, \frac{|a_0|}{|a_n|} \right\}.$$

Demostración. A modo de comentario, este ejercicio se puede resolver sin el teorema de Rouché. Como veremos a lo largo de la clase, la clave para entender bien que hacer en el teorema de Rouché consite en primero elegir apropiadamente la región, luego de eso elegir quienes son las funciones f y g en el teorema. En este caso, como piden estimar cuanto da el módulo de sus raices, tenemos en claro quien es la región.

Sea $M = \max \left\{ \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|}, \cdots, \frac{|a_0|}{|a_n|} \right\}$ y sea $D = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < M + 1 \}$.

$$\text{Sean } f = z^n \text{ y } g = \frac{a_{n-1}}{a_n} z^{n-1} + \ldots + \frac{a_0}{a_n}.$$

Luego, observar que tenemos la siguiente desigualdad en ∂D. Sea $z \in \partial D$,

$$|g(z)| \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} \left|\frac{a_j}{a_n}\right| |z|^n \leqslant M \sum_{j=0}^{n-1} (M+1)^j = M\frac{(M+1)^n - 1}{M+1-1} = (M+1)^n - 1 = |f(z)| - 1 < |f(z)|.$$

De esta forma f y $f+g$ tienen la misma cantidad de ceros en D y luego se sigue el resultado. $\square$

Ejercicio 0.1.6. *Sean f y g dos funciones holomorfas sobre el disco $D_2(0)$ de manera que g no es idénticamente nula. Probar que la función $f(z) + z^n g(z)$ tiene al menos una raíz para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande en $D_2(0)$.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos la función $h_n(z) = z^n g(z)$. Observar que h_n tiene al menos una raíz en $D_2(0)$ ya que se anula en el origen.

El truco acá es el siguiente. Consideremos $1 < r < 2$ de manera tal que g no se anule sobre el disco $D_r = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = r \}$. Luego, sea $M = \text{máx}_{|z|=r} |f(z)|$. Observar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_0$ entonces se cumple que:

$$|h_n(z)| > M.$$

Esto podemos hacerlo puesto que al ser no nula, en dicho borde la misma se encuentra acotada inferiormente y luego como $|h_n(z)| \leqslant |h_{n+1}(z)|$ para todo $z \in D_r$ y $|h_n(z)| \to \infty$. Luego, tenemos que dado $z \in D_r$:

$$|f(z)| \leqslant \max_{|z|=r} |f(z)| = M < |h_n(z)| \text{ para todo } n \geqslant n_0.$$

Luego, se sigue el resultado del teorema de Rouché.

Notar que podemos hacer esto puesto que $\square$

Ejercicio 0.1.7. *Sean $N \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{D}_1(0)$, $m_1, \ldots, m_N \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{C}$. Decidir en función de b cuantas soluciones en $\mathbb{D}_1(0)$ tiene la ecuación:*

$$\prod_{j=1}^{N} \left(\frac{z - a_j}{1 - \overline{a_j} z} \right)^{m_j} = b.$$

Demostración. La idea detrás de este ejercicio, será utilizar apropiadamente el teorema de Rouché. Lo que haremos por comodidad será fijar notación.

1. Sea $P(z) = \prod_{j=1}^{N} (z - a_j)^{m_j}$.
2. Sea $Q(z) = \prod_{j=1}^{N} (1 - \overline{a_j} z)^{m_j}$.

Notemos que, la ecuación anterior puede ser escrita en función de P y Q. Es decir, para cada $b \in \mathbb{C}$ estamos buscando la cantidad de soluciones en $\mathbb{D}_1(0)$ de la ecuación:

$$P(z) - b \cdot Q(z) = 0.$$

En general cuando se trata de aplicaciones del teorema de Rouché más allá de las cuentas, es fundamental identificar primero cual es la región, y luego de eso identificar candidatos de funciones que sabemos controlarle los ceros en la región. En el caso de este ejercicio en particular, es claro que:

- La región a considerar será $\mathbb{D}_1(0)$.
- El que jugará el rol de f (en el enunciado de Rouché) podrá ser tanto P como Q dependiendo de para que lado haya que considerar la cota, puesto que para ambos tenemos controlada la cantidad de ceros en el disco.

Sin embargo, está bueno notar que hay un homografía dando vueltas, que es la homografía dada por $T_j(z) = \dfrac{z - a_j}{1 - \overline{a_j}z}$ manda el disco en si mismo y en particular sucede que:

$$|T_j(z)| = 1 \text{ si } |z| = 1.$$

Luego, notemos que en $|z| = 1$ sucede que:

$$\frac{|P(z)|}{|Q(z)|} = \prod_{j=1}^{N} |T_j(z)|^{m_j} = 1 \Rightarrow |P(z)| = |Q(z)|.$$

Luego, esto nos da la pauta de que debemos partir en tres casos.

1. $|b| < 1$.
2. $|b| > 1$.
3. $|b| = 1$.

Luego, vemos cada caso por separado.

1. Si $|b| < 1$ entonces tenemos que:

   $$|bQ(z)| < |Q(z)| = |P(z)| \text{ si } |z| = 1.$$

   y en consecuencia, por el teorema de Rouché, P y $P - bQ(z)$ tienen la misma cantidad de ceros en $\mathbb{D}_1(0)$. Pero P tiene $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} m_j$ ceros contados con multiplicidad en $\mathbb{D}_1(0)$ y en consecuencia $P - bQ(z)$ también.

2. Si $|b| > 1$ entonces tenemos que:

   $$|bQ(z)| > |Q(z)| = |P(z)| \text{ si } |z| = 1.$$

   En consecuencia $bQ(z)$ y $P(z) - bQ(z)$ tienen la misma cantidad de ceros en $\mathbb{D}_1(0)$. Pero $bQ(z)$ no tiene ceros en el disco unitario y en consecuencia se sigue.

3. Si $|b| = 1$ notemos que como $T_j(\mathbb{D}_1(0)) = \mathbb{D}_1(0)$ tenemos que $\displaystyle\prod_{j=1}^{N} (T_j(\mathbb{D}_1(0))^{m_j} \subseteq \mathbb{D}_1(0)$ y luego no tiene soluciones.

$\square$