0.1. Análisis Complejo-Leonardo Lanciano- Clase 1/11/23- Convergencia, Teorema de Montel

Definición 0.1.1. Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo. Definimos $\mathcal{O}(U) = \{ f : U \to \mathbb{C} \mid f \text{ holomorfa} \}$. Se puede ver que $\mathcal{O}(U)$ es un espacio métrico y que una sucesión de funciones $f_n \to f$ en $\mathcal{O}(U)$ si y solo si f_n converge uniformemente a f sobre cada compacto $K \subseteq U$.

Definición 0.1.2. Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(U)$.

1. Diremos que $\mathcal{F}$ es acotado o localmente acotado si para cada $x \in U$ existe $V_x \subseteq U$ entorno abierto de x y $M > 0$ de manera tal que:
$$|f(z)| < M \ \forall z \in V_x \ \forall f \in \mathcal{F}.$$
2. Diremos que $\mathcal{F}$ es normal si para cada $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ existe una subsucesión convergente. Es decir si $\mathcal{F}$ es precompacto con la métrica de $\mathcal{O}(U)$.

Observación 0.1.3. Dado $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(U)$ son equivalentes:

1. $\mathcal{F}$ es acotado.
2. Para todo $K \subseteq U$ compacto existe $C_K > 0$ tal que :
$$|f(z)| < C_K \forall z \in K, \ f \in \mathcal{F}.$$

Recordamos el siguiente resultado:

Teorema 0.1.4. *Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ una región y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones holomorfas $f_n \in \mathcal{O}(D)$ que converge hacia f en $\mathcal{O}(D)$. Entonces, $f \in \mathcal{O}(D)$ y la secuencia $\{f_n^{(k)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en cualquier subconjunto compacto de D hacia $f^{(k)}$ para todo $k \in \mathbb{N}$*

Continuamos la clase con un ejercicio de precalentamiento.

Ejercicio 0.1.5. *Sea $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ la función Zeta de Riemann y consideremos $f_N(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}$. Demostrar que si $U = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Re}(z) > 1 \}$ entonces $f_N \to \zeta$ en $\mathcal{O}(U)$ y concluir que ζ es holomorfa.*

Demostración. Para esto sea $K \subseteq U$ compacto. Observemos que si $s \in K$ tenemos que $\mathfrak{Re}(s)$ está acotada inferiormente. Luego existe $\varepsilon > 0$ de manera tal que $\mathfrak{Re}(s) \geqslant 1 + \varepsilon$. En consecuencia notar que:
$$\left|\frac{1}{n^s}\right| \leqslant \left|\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right| \text{ y } \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} < \infty$$
Luego se sigue por el criterio M de weiertrass que $f_N \rightrightarrows \zeta$ en K. Por lo que $f_N \rightrightarrows \zeta$ en $\mathcal{O}(U)$. $\square$

Luego comenzamos la clase con un recuerdo.

Teorema 0.1.6. *(Montel) Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto conexo y sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(U)$ una familia acotada (localmente acotada). Entonces $\mathcal{F}$ es normal.*

Luego, pasamos a hacer ejercicios de esto.

Ejercicio 0.1.7. *Probar que no existe $D \subseteq \mathbb{C}$ abierto conexo que satisface las siguientes dos condiciones:*

- $1 \in D$.

- $\mathcal{F} = \left\{ f_n : D \to \mathbb{C} \;\middle|\; f_n(z) = \cos\left(\frac{\sum_{j=0}^{n} z^n}{n}\right) \right\}$ *es acotado en* $\mathcal{O}(D)$.

Demostración. Para resolver este ejercicio utilizamos un truquito. Sea $U = D \cap D_1(0)$. Notemos que U es un abierto no vacío. Ahora bien, supongamos que existe tal abierto D. Luego, observemos que f_n son holomorfas en D y en consecuencia por el teorema de montel $\mathcal{F}$ es normal. Así, considerando la sucesión f_n se tiene que existe una subsucesión f_{n_k} convergente en D a cierta función holomorfa f en D. Sin embargo, notar que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{\sum_{j=0}^{n} z^n}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{\frac{z^{n+1}-1}{z-1}}{n}\right) = \cos(0) = 1 \text{ para todo } z \in U.$$

De esto, se sigue que $f_{n_k} \to 1$ en U. Pero como la convergencia era en D a una función holomorfa, se sigue por continuación analítica que $f_{n_k} \to 1$ en D. Sin embargo, notar que $f_n(1) = cos(1)\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ con lo cual tenemos una contradicción, que vino de suponer que existía tal abierto. □

Recordamos el siguiente resultado de la teórica

Lema 0.1.8. *Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(U)$ acotado. Entonces se cumple que, el conjunto $\mathcal{F}' = \{ f' \mid f \in \mathcal{F} \}$, es acotado.*

Demostración. Sea $x \in U$. Como $\mathcal{F}$ es acotado existe un entorno V_x y una constante M_x de manera tal que:

$$|f(z)| \leqslant M_x \ \forall z \in V_x \ \forall f \in \mathcal{F}.$$

Notar que se tiene de la fórmula integral de Cauchy que, dada $f \in \mathcal{F}$ y $w \in V_x$

$$|f'(w)| = \left| 2\pi i \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-w)^2} dz \right|.$$

Eventualente achicando la curva para que caiga en V_x se tiene que:

$$|f'(w)| \leqslant M_x 2\pi \int_\gamma \frac{1}{|(z-w)^2|} dz < \infty$$

Luego dicha familia es localmente acotada. □

Ejercicio 0.1.9. *Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo acotado que contenga al origen, y $f : U \to U$ una función holomorfa. Denotemos por $f_n(z)$ a la función que se obtiene componiendo a f con sigo misma n veces.*

1. *Probar que la familia de funciones $\mathcal{F} = \{f_n\}_n$ es localmente acotada.*
2. *Demuestre que si $f(0) = 0$, entonces $|f'(0)| \leqslant 1$.*

Demostración. Demostramos parte por parte.

1. Notemos que como U es acotado, existe $R > 0$ tal que $|w| < R$ para todo $w \in U$. Luego, sea $f_n \in \mathcal{F}$ y $z \in U$. Notemos que como

   $$|f_n(z)| = \left| f(f^{n-1}(z)) \right| < R \text{ ya que } f \text{ manda } U \text{ en } U.$$

   Observar que dicha constante R no depende de f ni de z. En consecuencia se sigue que la familia es localmente acotada.

2. Para esto procedemos por contradicción. Supongamos que $|f'(0)| > 1$. Luego consideremos $\mathcal{F}'$. Observar que como $\mathcal{F}$ es acotado, $\mathcal{F}'$ es acotado y luego por el teorema de Montel, es normal. Así, sabemos que existe una subsucesión convergente f'_{n_k}. Sin embargo, notar que tenemos que:

   $$f'_{n_k}(z) = f'(f_{n_k-1}(z)) f'_{n_k-1}(z) = f'(f_{n_k-1})(z) f'(f_{n_k-2}(z)) \ldots f'(z).$$

   Luego evaluando cero tenemos que, como $f(0) = 0$ vale que:

   $$\left| f'_{n_k}(0) \right| = |f'(0)|^{n_k}.$$

   Luego si $n_k \to \infty$ se sigue por contradicción.

$\square$

Ejercicio 0.1.10. *Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(D_1(0))$ la familia de funciones holomorfas dada por:*

$$\mathcal{F} = \left\{ f : D_1(0) \to \mathbb{C} \;\middle|\; f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \text{ donde } |a_n| \leqslant n \ \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Demostrar que $\mathcal{F}$ es compacto.

Demostración. Un conjunto es compacto en $\mathcal{O}(D_1(0))$ si y solo si es precompacto y cerrado. Luego, primero veremos que $\mathcal{F}$ es normal, y luego veremos que su límite cae dentro del conjunto. Para ver que es normal utilicemos el teorema de Montel.

Luego sea $K \subseteq D_1(0)$ un compacto y $x \in K$. Observar que existe $R < 1$ de manera que:

$$K \subseteq \{ z \in D_1(0) \mid |z| < R \}.$$

Luego, se tiene que:

$$|f(z)| = \left| z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \right| \leqslant |z| + \sum_{n=2}^{\infty} |a_n z^n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} nR^n < \infty.$$

Observar que dicha cota solo depende del compacto y no depende ni de z ni de f. Luego el conjunto $\mathcal{F}$ es localmente acotado. De esta forma dada $f_n \in \mathcal{F}$ existe una subsucesión f_{n_k} y una función holomorfa f de manera que:

1. $f_{n_k} \to f$ en $\mathcal{O}(D_1(0))$.
2. $f_{n_k}^{(j)} \to f^{(j)}$ en $\mathcal{O}(D_1(0))$.

Luego basta ver que los coeficientes cumplen con la desigualdad deseada. Notemos que como f es holomorfa en $D_1(0)$ entonces es analítica, luego $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Notar que:

1. $b_0 = f(0) = \lim_{n_k} f_{n_k}(0) = 0$.
2. $b_1 = f'(0) = \lim_{n_k} f'_{n_k}(0) = 1$.
3. Para $j \geqslant 2$ es $b_j = \dfrac{f^{(j)}(0)}{n!} = \lim\limits_{n_k} \dfrac{f_{n_k}^{(j)}(0)}{n!}$. Ahora notar que este es el coeficiente de la serie de f_{n_k} y son todos menores o iguales que n por estar en $\mathcal{F}$ luego este límite está en el conjunto y en consecuencia $\mathcal{F}$ es compacto.

$\square$