0.1. Análisis Complejo-Leonardo Lanciano- Clase 24/04/23- Teorema de Cauchy Goursat

Lo primero que vamos a ver son algunas propiedades que quedaron colgadas de la clase pasada. Arrancamos la clase viendo algunas propiedades básicas de integrales que faltaban.

Proposición 0.1.1. *Sea $T : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa e inyectiva. Consideremos una curva $\gamma : [a, b] \to U$ y $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función continua tal que $T(U) \subseteq \Omega$. Demostrar que:*

$$\int_{T\circ\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} f(T(z))T'(z)dz.$$

Demostración. Se sigue de la definición y la regla de la cadena pues:

$$\int_{T\circ\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(T(\gamma(z)))T'(\gamma(z))\gamma'(z)dz = \int_{\gamma} f(T(z))T'(z)dz.$$

□

Otra propiedad que vale es que uno puede particionar el dominio como uno quiere en el siguiente sentido.

Proposición 0.1.2. *Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ simplemente conexo y, γ es una curva cerrada simple que demarca D, y $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}$ es un conjunto finito de curvas cerradas simples que están contenidas en D y que, en conjunto, particionan la región D. Dada $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ entonces se tiene que:*

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\, dz$$

En otras palabras, la integral de $f(z)$ a lo largo de la curva cerrada γ es igual a la suma de las integrales de $f(z)$ a lo largo de cada una de las curvas cerradas $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$.

Teorema 0.1.3. *(Cauchy-Goursat) Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto simplemente conexo, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa y consideremos $\gamma \subseteq U$ una curva continua cerrada, entonces vale lo siguiente:*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Ahora que ya vimos algunas propiedades básicas hacemos un ejercicio clásico de integración.

Ejercicio 0.1.4. *Sea C la circunferencia de radio 1 centrada en 0. Para cada $k \in \mathbb{Z}$ calcular* $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z^k}$

Demostración. Observar que si $k \leqslant 0$ entonces la función $\frac{1}{z^k}$ resulta holomorfa y en consecuencia por el teorema de Cauchy Goursat se tiene que $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z^k} = 0$. Ahora, si $k \geqslant 1$ entonces:

$$\int_C \frac{dz}{z^k} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{(e^{it})^k}dt = i\int_0^{2\pi} e^{(1-k)it}dt = \begin{cases} 2\pi i & k = 1 \\ 0 & k > 1 \end{cases}$$

□

Proposición 0.1.5. *(Lema de Jordan) Consideremos $\gamma_R = Re^{it}$ con $t \in [0, \phi]$ y $\phi \leqslant \pi$. Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función continua tal que f está definida sobre γ_R para R suficientemente grande, que además tiene la forma $f(z) = e^{iaz}g(z)$ para g continua y $a > 0$. Entonces se cumple que:*

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\right| \leqslant \frac{\pi}{a}M_R \text{ donde } M_R = \sup_{\theta\in[0,\phi]} |g(Re^{i\theta})|.$$

Demostración. Demostramos esto operando a mano. Notemos que tenemos la siguiente cadena de desigualdades.

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_R} f(z)\right| = \left|\int_0^{\phi} e^{iaRe^{i\theta}} g(Re^{i\theta})Rie^{i\theta}d\theta\right| &\leqslant R\int_0^{\phi}\left|g(Re^{i\theta})\right|\left|e^{iaRe^{i\theta}}\right|d\theta \\
&\leqslant R\cdot M_R\cdot\int_0^{\pi} e^{\mathfrak{Re}(iaR(\cos(\theta)+i\sin\theta))}d\theta \\
&\leqslant R\cdot M_R\cdot\int_0^{\pi} e^{-Ra\sin(\theta)}d\theta \\
&\leqslant 2R\cdot M_R\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Ra\sin(\theta)}d\theta \\
&\leqslant 2R\cdot M_R\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Ra\frac{2}{\pi}\theta}d\theta \\
&= 2R\cdot M_R\frac{\pi}{R2a}(1-e^{-aR}) \leqslant \frac{\pi}{a}M_R.
\end{aligned}$$

Donde para la ante ultima desigualdad usamos la concavidad del seno. Es decir que:

$$\sin(\theta) \geqslant \frac{2}{\pi}\theta \text{ si } \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

Por lo que se sigue el resultado. □

Ahora vamos a usar esto para resolver un ejercicio.
Recordamos ahora quien es la función gamma.

Recuerdo 0.1.6. *Para $z\in\mathbb{C}$ tal que $\mathfrak{Re}(z)>0$ definimos $\Gamma(z)$ como:*

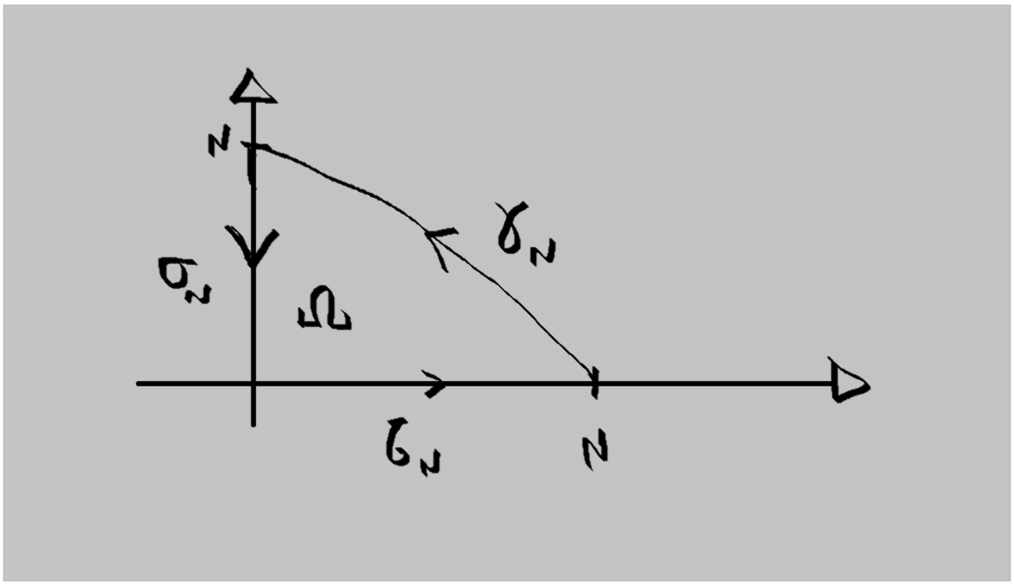
$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}.$$

Si bien esta función tiene muchas propiedades buenas, la recordamos porque aparecerá en una fórmula que demostraremos.

Ejercicio 0.1.7. *Sea $s\in\mathbb{C}$ tal que $0<\mathfrak{Re}(s)<1$, entonces:*

$$\int_0^{\infty} x^{s-1}e^{ix}dx=\Gamma(s)e^{-\frac{i\pi s}{2}}.$$

Demostración. Lo que haremos en este caso, será intentar escribir dicha integral como una integral de contorno apropiada. Sea γ_N el arco de circunferencia de radio N con argumento entre 0 y $\frac{\pi}{2}$, sean τ_N el segmento real entre 0 y N y σ_N el segmento puramente imaginario entre 0 y Ni. Llamemos $\mu_N=\gamma_N\cup\tau_N\cup\sigma_N$ donde orientamos a cada una de las curvas para que μ_N quede orientada en sentido anti horario. Si llamamos Ω a la región encapsulada por la curva μ_N tenemos el siguiente dibujo para esquematizar.



Ahora bien, sea $f(z) = z^{s-1}e^{iz}$. Notemos que $f(z)$ es holomorfa en Ω y entonces por 0.1.3 tenemos que, para cada $N \in \mathbb{N}$ es:

$$\begin{aligned}
0 = \int_{\mu_N} f(z)dz &= \int_{\tau_N} f(z)dz + \int_{\gamma_N} f(z)dz + \int_{\sigma_N} f(z)dz \\
&= \int_0^N x^{s-1}e^{ix}dx + \int_{\gamma_N} f(z)dz - \int_0^N (ix)^{s-1}e^{-x}idx \\
&= \int_0^N x^{s-1}e^{ix}dx + \int_{\gamma_N} f(z)dz - \int_0^N (e^{i\frac{\pi}{2}})^s(x)^{s-1}e^{-x}dx \\
&= \int_0^N x^{s-1}e^{ix}dx + \int_{\gamma_N} f(z)dz - e^{i\frac{\pi s}{2}}\int_0^N x^{s-1}e^{-x}dx.
\end{aligned}$$

Observar que, si tendemos N a infinito, la primera integral tendería a $\Gamma(s)$ mientras que la tercera tendería a la integral deseada. Por lo que resta ver que la segunda integral tiende a cero. Para esto, acotaremos su módulo en función de N.

$$\left|\int_{\gamma_N} f(z)dz\right| = \left|\int_{\gamma_N} z^{s-1}e^{iz}dz\right| \leqslant \pi \sup_{\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]} \left|(Ne^{i\theta})^{s-1}\right| = \pi N^{\mathfrak{Re}(s)-1}.$$

Por lo que tomando limite se sigue que:

$$e^{i\frac{\pi s}{2}}\int_0^\infty x^{s-1}e^{ix}dx = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx = \Gamma(s).$$

Y pasando dividiendo ya estamos. □