0.1. Análisis Complejo-Leonardo Lanciano- Clase 28/08/23- Series de Potencias

La idea de la clase de hoy es estudiar la convergencia de series de potencias. Para esto, recordamos la definición de radio de convergencia.

Definición 0.1.1. Sean $z_0 \in \mathbb{C}$ y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$. Dada una series de potencias de la forma $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Definimos el **radio de convergencia de** f como:

$$r = \sup\left\{ |z-z_0| \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ converge} \right\}.$$

Vale la pena obsevar que r puede ser infinito.

Recordamos ahora el siguiente teorema de la teórica.

Teorema 0.1.2. *Sean $z_0 \in \mathbb{C}$ y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ y $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ serie de potencias con radio de convergencia r, entonces vale lo siguiente:*

1. *Las sumas parciales $\sum_{n=0}^{N} a_n(z-z_0)^n$ convergen uniformemente a f en $(D_{z_0}(r))^\circ$.*
2. *La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ diverge si $|z-z_0| > r$.*
3. *Las sumas parciales pueden diverger o converger si $|z-z_0| = r$.*

Más aún, se tiene la siguiente fórmula para calcular el radio:

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Vamos ahora con un ejercicio rápido.

Ejercicio 0.1.3. *Calcular el radio de convergencia de la siguiente serie:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}.$$

Luego, a uno le encantaría aplicar la fórmula, pero hay un problema. ¿Quién es a_n?. La manera de hacer esto es definirla de manera auxiliar. Sea $a_k = \begin{cases} 1 & \text{si existe } n \text{ tal que } k = n! \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$. Luego debemos calcular $\limsup |a_k|$.

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1.$$

Luego el radio de convergencia es 1. Donde la última igualdad se sigue puesto que 1 es cota superior y tenemos una subsucesion que tiende a 1.

Lo siguiente que haremos será enunciar una proposición sobre la derivada de una serie.

Proposición 0.1.4. *Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tal que su radio de convergencia es $r > 0$. Consideremos $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$. Entonces el radio de convergencia de g es exactamente r.*

Demostración. Recordemos que si r es el radio de convergencia de f tenemos que:

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Ahora bien, notemos lo siguiente:

$$\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = r.$$

De esta manera, el resultado se sigue. □

Ahora hacemos un recuerdo de algo que también vieron/van a ver pronto en la teórica.

Recuerdo 0.1.5. *Consideremos $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto conexo y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sucesión de funciones holomorfas tal que $f_n \to f$ para cierta función f. Supongamos que existe g tal que $f_n' \rightrightarrows g$ en U. Entonces, se tiene que:*

1. *f es holomorfa.*
2. *$f_n \rightrightarrows f$.*
3. *$f' = g$.*

De esta manera, si juntamos la proposición anterior, el recuerdo y el teorema, obtenemos lo siguiente:

Observación 0.1.6. Dada $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ entonces vale que:

$$f' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Es decir que puedo derivar dentro de la serie. Y en particular, notemos que:

$$f(0) = a_0 \quad f'(0) = a_1 \quad f''(0) = 2a_2 \quad \ldots \quad f^{(n)} = a_n n!.$$

De esta condición se sigue que si todas las derivadas de una función dada por una serie de potencias se anulan en el origen entonces la función es identicamente nula.

Recordemos ahora el criterio de convergencia de Dirichlet.

Recuerdo 0.1.7. *(Criterio de Dirichlet) Sean $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de números reales postivos tal que $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ y $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$. Entonces si las sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ están acotadas en módulo, vale que:*

$$\text{La serie } \sum_{n=1}^{\infty} r_n z_n \text{ converge.}$$

Ahora pasamos a un ejercicio un poco distinto, pero que es tipo de parcial y engloba muchisimos conceptos.

Ejercicio 0.1.8. *Sea $T : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función. Calcular en función de T la región de convergencia de la siguiente serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{\sqrt{n^2 - 7n + 4}} \left(T(z)\right)^n.$$

Demostración. Llamemos R a la región de convergencia de la serie. Y haciendo un abuso notacional, sea L la región de convergencia de:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^n}{\sqrt{n^2 - 7n + 4}} w^n.$$

Una observación que se desprende de esto es que :

$$w \in L \Leftrightarrow T^{-1}(w) \in R.$$

Es decir que:

$$T^{-1}(L) = R$$

Entonces, en primer lugar calculemos L. Para esto, como se trata de una serie de potencias centrada en el origen, recordemos que si $a_n = \frac{i^n}{\sqrt{n^2-7n+4}}$ el radio de convergencia se calcula como:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{\sqrt{n^2-7n+4}}{i^n}\right|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[2n]{n^2-7n+4} = 1.$$

De esta manera, sabemos que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^n}{\sqrt{n^2-7n+4}} w^n$ converge uniformemente en $(D_1(0))^{\circ}$. Resta ver que sucede en el borde. Para esto, sea w tal que $|w| = 1$. Llamemos $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-7n+4}}$ y $z_n = (iw)^n$. Notemos que, si $w \neq -i$ entonces:

$$\sum_{n=1}^{N} z_n = \sum_{n=1}^{N} z_n - 1 = \frac{(iw)^{N+1}-1}{iw-1} - 1.$$

En consecuencia, acotamos su módulo.

$$\left|\frac{(iw)^{N+1}-1}{iw-1} - 1\right| = \left|\frac{(iw)^{N+1}-iw}{iw-1}\right| = \left|\frac{(iw)^{N}-1}{iw-1}\right| \leqslant \left|\frac{2}{iw-1}\right|.$$

Por lo que, a_n es decreciente y z_n está acotada, es decir que por el criterio de Dirichlet la serie converge. De esta forma, resta ver el caso en el que $w = -i$. Sin embargo, notar lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^n}{\sqrt{n^2-7n+4}}(-i)^n = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-7n+4}} \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+4n+4}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n+2} \geqslant \infty.$$

De esta manera, tenemos que:

$$L = D_1(0) \backslash \{ -i \}.$$

$$R = T^{-1}(L) = T^{-1}(D_1 \backslash \{ -i \}) = T^{-1}(D_1) \backslash \{ T^{-1}(-i) \}$$

□

Definición 0.1.9. Dado $\alpha \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Procedo a dar una observación que utilizaré en algún momento.

Observación 0.1.10. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces:

$$\left((n+1)\binom{\alpha}{n+1} + n\binom{\alpha}{n}\right) = \alpha\binom{\alpha}{n}.$$

Demostración. La demostración se sigue de hacer la cuenta.

$$\begin{aligned}
\left((n+1)\binom{\alpha}{n+1} + n\binom{\alpha}{n}\right) &= \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!} + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} \\
&= \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}\left(\frac{\alpha-n}{n} + 1\right) \\
&= \alpha\binom{\alpha}{n}.
\end{aligned}$$

□

Ejercicio 0.1.11. *Consideremos para $\alpha \in \mathbb{C}$ la función f_α como:*

$$f_\alpha(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n.$$

Demostrar que:

1. *La serie converge uniformemente en* $(D_1(0))^\circ$.
2. $(f_\alpha)'(z) = \dfrac{\alpha f_\alpha(z)}{1+z}$.
3. $f_\alpha f_\beta = f_{\alpha+\beta}$.

Demostración. Comenzamos recordando la siguiente propiedad de cálculo avanzado.

Recuerdo 0.1.12. *Sea* $\{ a_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de números reales positivos, entonces vale lo siguiente:*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

De esto se deduce que si $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ es convergente en $\mathbb{R} \cup \{ \infty \}$ entonces ambos límites coinciden. ¿Para qué nos sirve esto?. Bueno, el radio de convergencia es un límite superior de una raíz enésima, pero capaz para algunas sucesiones es difícil de calcular ese límite, como es el caso de la que consideraremos.

Sea $a_n = \binom{\alpha}{n}$. Lo primero que notamos es que el radio de convergencia de f_α va a estar dado por:

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Veremos que dicho límite efectivamente existe, para esto calcularemos cuanto da

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|}{\left|\binom{\alpha}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{(n)!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha-n|}{n+1} = 1.$$

En consecuencia el radio de convergencia es 1 y tenemos el primer resultado. Para el segundo resultado, vamos a usar que podemos derivar dentro de la serie como vimos al comienzo de la clase. Notemos que:

$$(f_\alpha)'(z) = \sum_{i=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n} z^{n-1} \text{ y } z(f_\alpha)'(z) = \sum_{i=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n} z^n.$$

De esta manera, dado $z \in D_1(0)$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
(1+z)(f_\alpha)'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n} z^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n} z^n = \alpha + \sum_{n=2}^{\infty} n\binom{\alpha}{n} z^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n} z^n \\
&= \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\binom{\alpha}{n+1} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n} z^n = \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \left((n+1)\binom{\alpha}{n+1} + n\binom{\alpha}{n} \right) z^n \\
&= \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha\binom{\alpha}{n} z^n = \alpha f_\alpha(z).
\end{aligned}$$

De esta manera, el resultado se sigue. Para la tercera parte, sea $H = f_\alpha f_\beta - f_{\alpha+\beta}$. Veremos que $H = 0$ en $D_1(0)$. Esta condición es equivalente a ver que tanto H como todas sus derivadas son cero en el cero. Notemos que, $f_\gamma(0) = 1 \ \forall \gamma \in \mathbb{C}$. De esta manera, $H(0) = 0$. Ahora bien,

$$H'(z) = f'_\alpha(z) f_\beta(z) + f_\alpha(z) f'_\beta(z) = \alpha \frac{f_\alpha(z)}{1+z} f_\beta + \beta \frac{f_\beta(z)}{1+z} f_\alpha = \frac{(\alpha+\beta) f_\alpha(z) f_\beta(z)}{1+z} = \frac{\alpha+\beta}{1+z} H(z)$$

Luego, inductivamente se sigue que $H^{(n)}(z) = 0$. $\square$