0.1. Análisis Complejo- Leonardo Lanciano- Clase 17/9/23

Comenzamos la clase recordando el principio de módulo máximo.

Teorema 0.1.1. *Sea $D \subseteq \Omega$ abierto conexo tal que $\overline{D}$ es compacto. Consideremos $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ una función continua en $\overline{D}$ y holomorfa en su interior. Entonces se cumple que:*

$$\max_{z \in \partial D} |f(z)| = \max_{z \in \overline{D}} |f(z)|.$$

Con esto en mente uno puede deducir el siguiente resultado.

Corolario 0.1.2. *(Módulo Mínimo) Sea $D \subseteq \Omega$ abierto conexo tal que $\overline{D}$ es compacto. Consideremos $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ una función continua en $\overline{D}$ q y holomorfa en su interior tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in D$. Entonces se cumple que:*

$$\min_{z \in \partial D} |f(z)| = \min_{z \in \overline{D}} |f(z)|.$$

Proposición 0.1.3. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo y $K \subseteq \Omega$ un compacto. Consideremos $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones holomorfas y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa tales que $f_n \rightrightarrows f$ en ∂K. Luego $f_n \rightrightarrows f$ en K.*

Demostración. Se sigue de observar que dado $x \in K$ se tiene que:

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \max_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x \in \partial K} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \text{ si } n \text{ es lo suficientemente grande.}$$

□

Ejercicio 0.1.4. *Sean f, g analíticas en $\overline{D_1(0)}$ tal que $|f(z)| \leqslant |g(z)|$ para todo z tal que $|z| = 1$ y que además $g \neq 0$ en $D_1(0)$. Demostrar que $|f(0)| \leqslant |g(0)|$.*

Demostración. Consideremos $h(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)}$. Notemos que como $g \neq 0$ h es holomorfa en $D_1(0)$ y continua en $\overline{D_1(0)}$ en consecuencia, por el principio de módulo máximo tenemos que:

$$|h(z)| \leqslant \max_{z \in \partial D_1(0)} |h(z)| = \max_{|z|=1} |h(z)| \leqslant 1 \ \forall z \in D_1(0).$$

Luego, tenemos que $|h(0)| \leqslant 1$. En consecuencia, se sigue el resultado. □

Comenzamos la clase con el primer ejercicio.

Ejercicio 0.1.5. *Decidir si existe $f : D_1(0) \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que:*

$$|f(z)| = e^{|z|} \ \forall z \in D_1(0).$$

Demostración. Supongamos que existe tal función. Observar que $f \neq 0$ ya que la exponencial siempre es nunca nula. En consecuencia, sea $0 < r < 1$. Observar que por el principio de módulo mínimo aplicado a $D_r(0)$ tenemos que:

$$1 = \min_{z \in \overline{D}_r(0)} e^{|z|} = \min_{z \in \overline{D}_r(0)} |f(z)| = \min_{|z|=r} |f(z)| = \min_{|z|=r} e^{|z|} = e^r > 1.$$

Lo cual lleva a una contradicción, que vino de suponer que existía tal funcion □

Ejercicio 0.1.6. *Sea $f : D_1(0) \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $|f(z)| \leqslant 1 - |z|$ para todo $z \in D_1(0)$. Demostrar que $f = 0$.*

Demostración. Observar que la condición nos dice que si f es constante entonces debe necesariamente ser la función constantemente cero. Ahora bien, sea $1 > \varepsilon > 0$. Consideremos:

$$D_\varepsilon = \{\, |z| \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 - \varepsilon \,\}$$

Observar que existe z_0 tal que $|z_0| = 1 - \varepsilon$ tal que:

$$\max_{z \in D_\varepsilon} |f(z)| = |f(z_0)| \leqslant 1 - |z_0| = 1 - (1 - \varepsilon) = \varepsilon.$$

En particular, tendiendo ε a cero tenemos que:

$$\sup_{z \in D_1(0)} |f(z)| \leqslant 0 \Rightarrow f(z) = 0 \forall z \in D_1(0).$$

□

Pasamos a hacer ejercicios del lema de Schwartz.

Teorema 0.1.7. *(Lema de Schwarz) Sea $f(z)$ una función holomorfa en un disco abierto $\mathbb{D}$ que satisface $|f(z)| \leqslant 1$ para todo z en $\mathbb{D}$ y $f(0) = 0$. Entonces:*

1. *$|f(z)| \leqslant |z|$ para todo z en $\mathbb{D}$. Mas aún, la desigualdad anterior es una igualdad en algún punto si y solo si $f(z) = cz$ con $|c| = 1$.*
2. *$|f'(0)| \leqslant 1$ y nuevamente, la igualdad se cumple si y solo si $f(z) = cz$ con $|c| = 1$.*

De esto se desprende una primera observación un poco obvia que es que:

Observación 0.1.8. Sea $f(z)$ holomorfa en $D_1(0)$ con $f(0) = 0$ y otro punto fijo. Entonces $f(z) = z$.

Ejercicio 0.1.9. *Sea $f : D_1(0) \to D_1(0)$ una función holomorfa tal que $f(0) = 0$.*

1. *Demostrar que $|f(z) + f(-z)| \leqslant 2\,|z|^2$.*

Demostración. Sea $g(z) = \dfrac{f(z) + f(-z)}{2z}$. Observemos que g es holomorfa en $D_1(0)$ puesto que $\lim_{z \to 0} g(z)$ existe y en particular $\lim_{z \to 0} g(z) = 0$ por la regla de L'hospital. De esta manera, notar que $g(D_1(0)) \subseteq D_1(0)$ puesto que:

$$|g(z)| \leqslant \frac{|f(z) + f(-z)|}{|2z|} \leqslant 1.$$

Luego por el lema de schwartz se sigue que:

$$|g(z)| \leqslant |z| \Rightarrow |f(z) + f(-z)| \leqslant 2\,|z|^2.$$

□

Lema 0.1.10. *Sea $a \in D_1(0)$ y $\varphi_a(z) = \dfrac{a - z}{1 - \bar{a}z}$. Entonces φ_a es una función holomorfa y biyectiva en $D_1(0)$ cuya inversa es ella misma.*

Demostración. Observar que φ_a es holomorfa en $D_1(0)$ puesto que su denominador no se anula allí ya que $1 - \bar{a}z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{\bar{a}}$ cuyo módulo es mayor a 1. Ahora bien, por el principio del módulo máximo, tenemos que, si $|z| = 1$ es:

$$|\varphi_a(z)| = \left|\frac{a - z}{1 - \bar{a}z}\right| = \left|\frac{a - z}{1 - \bar{a}z}\right| \frac{1}{|\bar{z}|} = \left|\frac{a - z}{z - \bar{a}}\right| = 1.$$

Luego, se sigue del principio de módulo máximo que $\varphi_a(D_1(0)) \subseteq D_1(0)$. Mas aún, notar que $\varphi_a \circ \varphi_a(a) = a$ y $\varphi_a \circ \varphi_a(0) = 0$. Luego, esta es una función que fija el cero y además otro punto y luego por el lema de Schwartz tenemos que $\varphi_a \circ \varphi_a(z) = z$. En consecuencia $\varphi_a = \varphi_a^{-1}$. □

Teorema 0.1.11. *Una función $f : D_1(0) \to D_1(0)$ es un biholomorfismo de $D_1(0)$ (holomorfa con inversa holomorfa) si y solo si existen $a \in D_1(0)$ y $\theta \in [0, 2\pi)$ tales que:*

$$f(z) = e^{i\theta}\varphi_a(z).$$

Demostración. Observar que hemos probado por el lema anterior que los φ_a son Biholomorfismos de $D_1(0)$. Para demostrar esto la idea es muy sencilla. Sea f un biholomorfismo. Como este es sobre, existe $a \in D_1(0)$ tal que $f(a) = 0$. Luego, consideremos $\psi : D_1(0) \to D_1(0)$ dada por:

$$\psi_(z) = f \circ \varphi_a(z).$$

Observar que $\psi(0) = 0$. Luego por el lema de Schwartz, tenemos que $\left|\psi'(0)\right| \leqslant 1$. Aplicando ahora dicho lema a su inversa, tenemos que $\frac{1}{|\psi'(0)|} = \left|(\psi^{-1})'(0)\right| \leqslant 1$ y el resultado se sigue. □

Luego, cerramos la clase con un ejercicio.

Ejercicio 0.1.12. *Consideremos el disco $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y una función holomorfa $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$. Pruebe que para todo par de puntos $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$*

$$\frac{|f(z_1) - f(z_2)|}{|1 - \overline{f(z_1)}f(z_2)|} \leqslant \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \overline{z_1}z_2|}.$$

Demostración. Observar que la igualdad que nos da el resultado se puede interpretar como que hay que probar que:

$$\left|\varphi_{f(z_1)} \circ f(z_2)\right| \leqslant \left|\varphi_{z_1}(z_2)\right|.$$

Lo cual es equivalente a demostrar que:

$$\left|\varphi_{f(z_1)} \circ f \circ \varphi_{z_1}(z_2)\right| \leqslant |z_2|.$$

Pero esto se sigue del lema de schwartz puesto que $g = \varphi_{f(z_1)} \circ f \circ \varphi_{z_1}$ manda el disco en el disco y se cumple además que:

$$g(0) = \varphi_{f(z_1)} \circ f \circ \varphi_{z_1}(0) = \varphi_{f(z_1)} \circ f(z_1) = \varphi_{f(z_1)}(f(z_1)) = 0.$$

□