

ANÁLISIS II – ANÁLISIS MATEMÁTICO II – MATEMÁTICA 3

Segundo Cuatrimestre 2022

Práctica 5: Ecuaciones Diferenciales.

Ejercicio 1. Para cada una de las ecuaciones diferenciales que siguen, encontrar la solución general y la solución particular que satisfaga la condición dada:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x' - 2tx = t, & x(1) = 0, & \text{b) } x' = \frac{1+x^2}{1+t^2}, & x(1) = 0, \\ \text{c) } x' = \frac{1+x}{1+t}, & x(0) = 1, & \text{d) } x' = \frac{1+x}{1-t^2}, & x(0) = 1, \\ \text{e) } x' - x^{1/3} = 0, & x(0) = 0, & \text{f) } x' = \frac{1+x}{1+t}, & x(0) = -1. \end{array}$$

En todos los casos dar el intervalo maximal de existencia de las soluciones y decir si son únicas. En los casos en que el intervalo maximal de existencia no es la recta real, analizar cuál es la posible causa.

Ejercicio 2. Si $y = y(t)$ denota el número de habitantes de una población en función del tiempo, se denomina tasa de crecimiento de la población a la función definida como el cociente y'/y .

- Caracterizar (encontrar la ecuación) de las poblaciones con tasa de crecimiento constante.
- Dibujar el gráfico de $y(t)$ para poblaciones con tasa de crecimiento constante, positiva y negativa.
- ¿Cuáles son las poblaciones con tasa de crecimiento nula?
- Una población tiene tasa de crecimiento constante. El 1 de enero de 2002 tenía 1000 individuos, y cuatro meses después tenía 1020. Estimar el número de individuos que tendrá el 1 de enero del año 2022, usando los resultados anteriores.
- Caracterizar las poblaciones cuya tasa de crecimiento es una función lineal de t ($at + b$).
- Caracterizar las poblaciones cuya tasa de crecimiento es igual a $r - cy$, donde r y c son constantes positivas. Este es el llamado crecimiento logístico, en tanto que el correspondiente a tasas constantes es llamado crecimiento exponencial (por razones obvias ¿no?). Para poblaciones pequeñas, ambas formas de crecimiento son muy similares. Comprobar esta afirmación y comprobar también que en el crecimiento logístico $y(t)$ tiende asintóticamente a la recta $y = r/c$.

Ejercicio 3. Si un cultivo de bacterias crece con un coeficiente de variación proporcional a la cantidad existente y se sabe además que la población se duplica en 1 hora ¿Cuánto habrá aumentado en 2 horas?

Ejercicio 4. Verifique que las siguientes ecuaciones son homogéneas de grado cero y resuelva:

$$\text{a) } tx' = x + 2t \exp(-x/t) \quad \text{b) } txx' = 2x^2 - t^2 \quad \text{c) } x' = \frac{x+t}{t}, \quad x(1) = 0$$

Ejercicio 5. Demuestre que la sustitución $y = at + bx + c$ cambia $x' = f(at + bx + c)$ en una ecuación con variables separables y aplique este método para resolver las ecuaciones siguientes:

$$\text{a) } x' = (x+t)^2 \quad \text{b) } x' = \text{sen}^2(t-x+1)$$

Ejercicio 13.

1. Hallar las soluciones de:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & y' + y = \operatorname{sen}(x), \\ \text{ii)} \quad & y' + y = 3 \cos(2x). \end{aligned}$$

2. Halle las soluciones de $y' + y = \operatorname{sen}(x) + 3 \cos(2x)$ cuya gráfica pase por el origen (Piense, y no haga cuentas de más).

Ejercicio 14. Sea la ecuación no homogénea $y' + a(x)y = b(x)$ donde $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas con período $p > 0$ y $b \not\equiv 0$:

1. Pruebe que una solución Φ de esta ecuación verifica:

$$\Phi(x + p) = \Phi(x), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Phi(0) = \Phi(p).$$

2. Encuentre las soluciones de período 2π para las ecuaciones:

$$y' + 3y = \cos(x), \quad y' + \cos(x)y = \operatorname{sen}(2x).$$

Ejercicio 15. Suponga que el ritmo al que se enfría un cuerpo caliente es proporcional a la diferencia de temperatura entre él y el ambiente que lo rodea (ley de enfriamiento de Newton). Un cuerpo se calienta 110°C y se expone al aire libre a una temperatura de 10°C . Al cabo de una hora su temperatura es de 60°C . ¿Cuánto tiempo adicional debe transcurrir para que se enfríe a 30°C ?

Ejercicio 16. Se sabe que el Carbono 14 tiene una semivida de 5600 años. Es decir, su cantidad se reduce a la mitad por desintegración radioactiva en ese lapso de tiempo.

Si en una roca sedimentaria había al formarse un 40% de Carbono 14 y ahora hay un 2% ¿Cuánto tiempo pasó desde que se depositaron los sedimentos?

Observación: la tasa de cambio del Carbono 14, \dot{x}/x , es constante.

Ejercicio 17. Si la resistencia del aire que actúa sobre un cuerpo de masa m en caída libre ejerce una fuerza retardadora sobre el mismo proporcional a la velocidad ($= -kv$), la ecuación diferencial del movimiento es:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g - c \frac{dy}{dt}, \text{ o bien } \frac{dv}{dt} = g - cv$$

donde $c = k/m$. Supongamos $v = 0$ en el instante $t = 0$, y $c > 0$. Encontrar $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$ (llamada velocidad terminal).

Si la fuerza retardadora es proporcional al cuadrado de la velocidad, la ecuación se convierte en:

$$\frac{dv}{dt} = g - cv^2.$$

Si $v(0) = 0$, encuentre la velocidad terminal en este caso.

Ejercicio 18. La ecuación $y' + P(x)y = Q(x)y^n$, que se conoce como la ecuación de Bernoulli, es lineal cuando $n = 0, 1$. Demuestre que se puede reducir a una ecuación lineal para cualquier valor de $n \neq 1$ por el cambio de variable $z = y^{1-n}$, y aplique este método para resolver las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & xy' + y = x^4y^3, \\ \text{b)} \quad & xy^2y' + y^3 = x \cos x, \\ \text{c)} \quad & xy' - 3y = x^4. \end{aligned}$$