

ANÁLISIS II – ANÁLISIS MATEMÁTICO II – MATEMÁTICA 3

Segundo Cuatrimestre 2022

**Práctica 3: Teorema de Green.**

**Ejercicio 1.** Verificar el Teorema de Green para el disco  $D$  con centro  $(0, 0)$  y radio  $R$  y las siguientes funciones:

- (a)  $P(x, y) = xy^2, \quad Q(x, y) = -yx^2.$
- (b)  $P(x, y) = 2y, \quad Q(x, y) = x.$

**Ejercicio 2.** Verificar el Teorema de Green y calcular  $\int_C y^2 dx + x dy$ , siendo  $C$  la curva recorrida en sentido positivo:

- (a) Cuadrado con vértices  $(0, 0), (2, 0), (2, 2), (0, 2).$
- (b) Elipse dada por  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$
- (c)  $C = C_1 \cup C_2$ , donde  $C_1 : y = x, x \in [0, 1]$ , y  $C_2 : y = x^2, x \in [0, 1].$

**Ejercicio 3.** Usando el teorema de Green, hallar el área de:

- (a) El disco  $D$  con centro  $(0, 0)$  y radio  $R$
- (b) La región dentro de la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

**Ejercicio 4.** Sea  $D$  la región encerrada por el eje  $x$  y el arco de cicloide:

$$x = \theta - \sin \theta, \quad y = 1 - \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Usando el teorema de Green, calcular el área de  $D$ .

**Ejercicio 5.** Hallar el área entre las curvas dadas en polares por

$$\begin{aligned} r &= 1 + \cos \theta && \text{con } -\pi \leq \theta \leq \pi, \\ r &= \sqrt{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta} && \text{con } -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

**Ejercicio 6.** Probar la fórmula de integración por partes: Si  $D \subset \mathbb{R}^2$  es un dominio elemental,  $\partial D$  su frontera orientada en sentido antihorario y  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$  la normal exterior a  $D$ , entonces

$$\int_D u v_x dx dy = - \int_D u_x v dx dy + \int_{\partial D} u v n_1 ds,$$

para todo par de funciones  $u, v \in C(\bar{D}) \cap C^1(D).$

**Ejercicio 7.** Sean  $P$  y  $Q$  funciones continuamente diferenciables en  $\mathbb{R}^2$ . Verificar que el Teorema de Green para estas funciones es válido cuando la región  $D$  es el anillo

$$D = \{(x, y) / 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Sugerencia: Aplicar el Teorema de Green en los discos de radios 1 y 2.

**Ejercicio 8.** Sea  $C$  la curva

$$\begin{aligned} x &= 0, && 0 \leq y \leq 4, \\ y &= 4, && 0 \leq x \leq 4, \\ y &= x, && 0 \leq x \leq 1, \\ y &= 2 - x, && 1 \leq x \leq 2, \\ y &= x - 2, && 2 \leq x \leq 3, \\ y &= 4 - x, && 2 \leq x \leq 3, \\ y &= x, && 2 \leq x \leq 4, \end{aligned}$$

orientada positivamente. Calcular

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{y}{(x-1)^2 + y^2} dx + \frac{1-x}{(x-1)^2 + y^2} dy.$$

**Ejercicio 9.** Sea  $D = \{(x, y) / 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$ . Calcular

$$\int_{\partial D} x^2 y dx - x y^2 dy.$$

Como siempre,  $\partial D$  está recorrido en sentido directo (el contrario a las agujas del reloj).

**Ejercicio 10.** Calcular el trabajo efectuado por el campo de fuerzas  $F(x, y) = (y + 3x, 2y - x)$  al mover una partícula rodeando una vez la elipse  $4x^2 + y^2 = 4$  en el sentido de las agujas del reloj.

**Ejercicio 11.** Sea  $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right)$ . Calcular  $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot ds$  donde  $\mathcal{C}$  es la circunferencia unitaria centrada en el origen orientada positivamente. Calcular  $Q_x - P_y$ . ¿Se satisface en este caso el Teorema de Green?

**Ejercicio 12.** Sea  $\mathcal{C}$  una curva cerrada, simple y suave orientada positivamente que encierra la circunferencia unitaria centrada en el origen. Calcular  $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot ds$  para el campo  $\mathbf{F}$  definido en el ejercicio 11.

**Ejercicio 13.** Calcular  $\int_{\mathcal{C}} f_1 dx + f_2 dy$  siendo

$$f_1(x, y) = \frac{x \operatorname{sen} \frac{\pi}{2(x^2+y^2)} - y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_2(x, y) = \frac{y \operatorname{sen} \frac{\pi}{2(x^2+y^2)} + x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

y

$$\mathcal{C} = \begin{cases} y = x + 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ y = 1 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

recorrida del  $(-1, 0)$  al  $(1, 0)$ .

**Ejercicio 14.** Determinar todas las circunferencias  $\mathcal{C}$  en el plano  $\mathbb{R}^2$  sobre las cuales vale la siguiente igualdad

$$\int_{\mathcal{C}} -y^2 dx + 3x dy = 6\pi.$$

**Ejercicio 15.** Calcular la integral  $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot ds$  donde

$$\mathbf{F}(x, y) = (y^2 e^x + \cos x + (x - y)^2, 2y e^x + \operatorname{sen} y),$$

y  $\mathcal{C}$  es la curva

$$x^2 + y^2 = 1, \quad y \geq 0,$$

orientada de manera tal que comience en  $(1, 0)$  y termine en  $(-1, 0)$ .

**Ejercicio 16.** Sean  $u, v \in C^1(D)$ , donde  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$ . Consideremos los campos definidos por  $\mathbf{F}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ ,  $\mathbf{G}(x, y) = (v_x - v_y, u_x - u_y)$ . Calcular

$$\iint_D (\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})(x, y) dx dy$$

sabiendo que sobre el borde de  $D$  se tiene  $u(x, y) = x$ ,  $v(x, y) = 1$ .