Análisis II – Análisis matemático II – Matemática 3

Segundo Cuatrimestre 2023

Práctica 3: Integrales de superficie.

Ejercicio 1. Dadas las siguientes superficies en coordenadas esféricas, determinar su correspondiente ecuación en **c**oordenadas cartesianas y graficar

(a) $r = k \quad (k = cte)$.

(b) $\varphi = k, \quad k \in (0, \pi/2]$ constante.

En cada uno de los casos anteriores dé un **v**ersor normal en cada punto.

Ejercicio 2.

(a) Mostrar que $\Phi_1 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ y $\Phi_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi) \mapsto \mathbb{R}^3$ dadas por

$$\Phi_1(u,v) = \big(u, v, \tfrac{u^2}{a^2} + \tfrac{v^2}{b^2}\big), \text{ con } a, b \text{ no nulos},$$
$$\Phi_2(u,v) = \big(au\ \cos(v), bu\ \sin(v), u^2\big),$$

son dos parametrizaciones del **paraboloide elíptico**.

(b) Mostrar que

$$\Phi(u,v) = \big((a + b\cos(u))\sin(v), (a + b\cos(u))\cos(v), b\sin(u)\big)$$

con $0 < b < a$, y $u, v \in [0, 2\pi]$, es una parametrización del **toro** (ver el ejercicio de las superficies de revolución al final de esta práctica).

Ejercicio 3. Considerar la superficie dada por la parametrización:

$$x = u\ \cos(v), \qquad y = u\ \operatorname{sen}(v), \qquad z = u.$$

¿Es diferenciable esta parametrización? ¿Es suave la superficie?

Ejercicio 4. Sea $\mathcal{C}$ la curva en el plano xy dada en polares por:

$$r = 2 - \cos\theta \quad \text{para } -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}.$$

Sea S la superficie que se obtiene por **revolución** de esta curva alrededor del eje y.

(a) Dar una parametrización de S.

(b) ¿Es suave esta superficie?

Ejercicio 5. Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera de radio a y centro en el origen en un punto (x_0, y_0, z_0) genérico de la esfera.

Ejercicio 6. Encontrar una ecuación para el plano tangente en el punto (0,1,1) a la superficie dada por la parametrización

$$x = 2u, \qquad y = u^2 + v, \qquad z = v^2.$$

Ejercicio 7. Sea $\phi(r,\theta) : [0,1] \times [0,2\pi] \mapsto \mathbb{R}^3$ dada por

$$x = r\cos(\theta), \qquad y = r\operatorname{sen}(\theta), \qquad z = \theta,$$

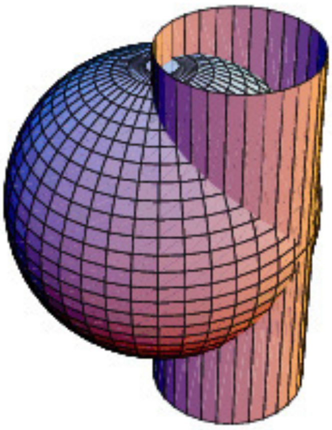
la parametrización de una superficie $\mathcal{S}$. Graficar $\mathcal{S}$, hallar un vector normal en cada punto y hallar su área.

Ejercicio 8. Sea $\phi(u,v) : D \mapsto \mathbb{R}^3$ (D el disco unitario centrado en el origen)

$$\phi(u,v) = (u - v, u + v, uv)$$

la parametrización de una superficie. Calcular su área.

Ejercicio 9. Calcular el área de la superficie de ecuación $x^2+y^2+z^2 = R^2$ con $(x-R/2)^2+y^2 \leq (R/2)^2$. Esta superficie se conoce como *bóveda de Viviani.*



Ejercicio 10. Si tenemos una curva en el plano xz dada por $\{(x, 0, f(x)) : x \in [\alpha, \beta]\}$ con α positivo, y consideramos la superficie de revolución alrededor del eje z, muestre que el área de esta superficie es

$$A = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Aplicar a la superficie dada en el ejercicio (2) item a) para calcular el área del paraboloide elíptico con $1 \leq z \leq 2$, y $a = b = 1$.

Ejercicio 11. Sea $\mathcal{C}$ la curva dada por

$$\begin{cases} x(\theta) = \cos^3\theta \\ y(\theta) = \operatorname{sen}^3\theta \end{cases}$$

con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ en el plano xy. Sea S la superficie que se obtiene al girar la curva $\mathcal{C}$ alrededor del eje x

(a) Hallar una parametrización de S.
(b) Hallar el área de S.

Ejercicio 12. Calcular $\iint_S xy\, dS$ donde S es el borde del tetraedro con lados $z = 0$, $y = 0$, $x + z = 1$ y $x = y$.

Ejercicio 13. Calcular $\iint_S (x + y + z) dS$ donde

(a) S es el borde de la bola unitaria, es decir $S = \{(x, y, z)/x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
(b) S es la parte superior de la esfera unitaria: $S = \{(x, y, z)/x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$.

Ejercicio 14. Hallar la masa de una superficie esférica de radio r tal que en cada punto $(x, y, z) \in S$ la densidad de masa es igual a la distancia entre (x, y, z) y el punto $(0, 0, r)$.

Recordamos que una superficie $\mathcal{S}$ es orientable si hay una forma de elegir en cada punto P de $\mathcal{S}$ un único versor normal $\nu(P)$ de modo que la función vectorial que esta elección define sobre $\mathcal{S}$ resulte continua.

Por ejemplo, si $\mathcal{S}$ es un gráfico, $\mathcal{S} = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2\}$, se puede elegir en todos los puntos un versor normal que apunte hacia arriba (es decir, con componente z positiva). Esta elección es continua en $\mathcal{S}$.

Si $\mathcal{S}$ es el borde de una región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de tipos I, II o III, se puede elegir como $\nu(P)$ la normal que apunta hacia afuera de Ω.

Recordamos que una superficie con una parametrización regular $T : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\mathcal{S} = Im(T)$, verifica que para cada $P \in \mathcal{S}$, $P = T(u_0, v_0)$, $T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0) \neq 0$. En ese caso,

$$\nu(P) = \frac{T_u(u, v) \times T_v(u, v)}{\|T_u(u, v) \times T_v(u, v)\|}, \quad \text{donde } (u, v) \text{ es tal que } P = T(u, v).$$

es un versor normal que orienta la superficie $\mathcal{S}$. Con esa elección de orientación decimos que $\mathcal{S}$ está orientada por la parametrización T.

Recordamos que si $\mathcal{S}$ es una superficie suave orientada con parametrización regular $T : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $\vec{F}$ un campo vectorial continuo sobre $\mathcal{S}$, entonces el flujo de $\vec{F}$ a través de $\mathcal{S}$ se define como

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{\mathbf{S}} &:= \iint_D \langle \vec{F}(T(u, v)), T_u \times T_v \rangle \; dudv \\ &= \iint_D \langle \vec{F}(T(u, v)), \tfrac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|} \rangle \|T_u \times T_v\| \; dudv \\ &= \iint_D \langle \vec{F}(T(u, v)), \nu(T(u, v)) \rangle \; \|T_u \times T_v\| \; dudv = \iint_S \vec{F} \cdot \nu \; dS \end{aligned}$$

Ejercicio 15. Demuestre la siguiente propiedad: '*Si $\mathcal{S}$ es una superficie suave orientada con parametrización regular $T : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $T_1 : D_1 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es otra parametrización de T con misma orientación, entonces para todo $\vec{F}$ un campo vectorial continuo sobre $\mathcal{S}$, el cálculo de $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$ da el mismo resultado cuando se utiliza la parametrización T o la parametrización T_1. Si T_1 invierte la orientación, los cálculos difieren en el signo.*

Ejercicio 16. Evaluar el flujo saliente del campo $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de la superficie del cubo $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

Ejercicio 17. Si la temperatura en un punto de $\mathbb{R}^3$ está dada por la función $T(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2$, calcular el flujo de calor (es decir el flujo del campo $-\nabla T$) a traves de la superficie $x^2 + z^2 = 2$, $0 \leq y \leq 2$, orientada de forma que la normal en el punto $(0, 0, \sqrt{2})$ sea (0,0,1).

Ejercicio 18. Sea S la superficie de la esfera unitaria orientada según la normal exterior. Sea $\vec{F}$ un campo vectorial y F_r su componente radial. Probar que

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F_r \operatorname{sen}(\phi) \; d\phi \; d\theta$$

Ejercicio 19. Sea S la parte del cono $z^2 = x^2 + y^2$ con z entre 1 y 2 orientada con la normal apuntando hacia el exterior del cono. Calcular $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$ con $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$.

Ejercicio 20. Sea $\vec{F}(x, y, z) = (ax, bx^2, cyx^2)$ que representa el campo de velocidad de un fluido (velocidad medida en metros por segundo, a, b, c constantes). Calcular cuántos metros cúbicos de fluido por segundo cruzan el plano xy a través del cuadrado $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ (las coordenadas x e y medidas en metros).

Ejercicio 21. (Superficies de revolución) Dada una curva en el plano yz:

$$\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$$

$Im(\sigma) \subset$ plano yz:

$$\sigma(t) = (0, y(t), z(t))$$

supongamos que σ es una parametrización regular y que $y(t) > 0 \forall t \in [a, b]$.

1. Muestre que la superficie de revolución alrededor del eje z se puede parametrizar por
$$T : [a,b] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$$
$$T(\theta,t) = \big(y(t)\cos\theta, y(t)\operatorname{sen}\theta, z(t)\big)$$
y que es una superficie regular (con la propiedad adicional $T_\theta \perp T_t$).
2. Si σ parametriza un segmento, entonces la superficie es o bien un cilindro o bien un sector de un cono. Haga un dibujo de un cono de cierta altura y cierto radio y calcule su área en función de esos parámetros.
3. Si σ es un círculo entonces la superficie es un toro (volver a mirar desde este punto de vista la parametrización del toro dada en el ejercicio 2 (b).
4. La parametrización de la superficie de una esfera es un ejemplo de esta construcción, donde σ es un semicírculo.

Ejercicio 22. Con la notación del ejercicio anterior, calcule $T_\theta \times T_t$ y su norma, y de una fórmula integral general del área de una superficie de revolución en función de los datos de la curva $\sigma(t)$.

Ejercicio 23. Considerar la superficie dada en forma paramétrica por
$$\begin{cases} x = \cos(\theta)(2 + t\cos(\frac{\theta}{2})) \\ y = \operatorname{sen}(\theta)(2 + t\cos(\frac{\theta}{2})) \\ z = t\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2}) \end{cases}$$
para $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$.

Probar que la superficie obtenida es suave (grafíquela por ejemplo en geogebra). Observar que se trata de la cinta de Moebius, que no es orientable (observe que para cada θ fijo, variando t se parametriza un segmento, contenido en un plano vertical apuntando en la dirección del ángulo θ, que va variando de inclinación a la "mitad de velocidad de θ"). En esta superficie está definida la integral de campos escalares (por ejemplo su cálculo de área) pero no está definido el cálculo de flujo de un campo a través de ella.