

**Los Teoremas integrales de  
Green, Stokes y Gauss  
en Análisis II y Matemática 3**

Victoria Paternostro y Julio Daniel Rossi



## Índice general

Preliminares	5
Capítulo 1. Teorema de Green	7
1. Regiones de tipo I, II y III	7
2. Orientaciones de curvas	8
3. Teorema de Green	10
4. Cálculo de áreas	15
5. Formas vectoriales del Teorema de Green	15
Capítulo 2. Teorema de Stokes	19
1. Demostración del Teorema de Stokes para gráficas	20
2. Demostración de Stokes (caso general, superficies parametrizadas)	22
Capítulo 3. Teorema de los campos conservativos	27
Capítulo 4. Teorema de Gauss	35
1. Superficies cerradas y tipo de regiones en $\mathbb{R}^3$	35
2. Teorema de Gauss y su demostración	36
Capítulo 5. Aplicaciones	41
1. Interpretación física del rotor	41
2. Interpretación física de la divergencia	42
3. Leyes de conservación. Ecuación del calor	42
4. Identidades de Green	46
Bibliografía	47



## Preliminares

Estas notas están pensadas para ser usadas en la materia Análisis II/Matemática 3/Análisis Matemático II del Departamento de Matemática, FCEyN, UBA. Son una continuación de las notas sobre curvas y superficies de Gabriel Acosta y Noemí Wolanski ([1]) y con ellas se completa el contenido teórico de la primera parte del curso.

Los temas que se presentan son los tres grandes teoremas integrales: Teorema Green, de Stokes y de Gauss así como el teorema de los campos conservativos. Se trata de desarrollarlos sin un exagerado formalismo y sin perder las ideas geométricas subyacentes. Las demostraciones que haremos no tienen la mayor generalidad posible, pero son adecuadas al contexto del curso.

Un excelente libro que contiene los temas tratados en estas notas - y que seguimos ya que posee un enfoque similar al nuestro - es [4].

El principal objetivo en esta parte del curso es comprender tres posibles formas de extender el teorema fundamental del cálculo en un intervalo. Sabemos que vale

$$(0.1) \quad f(b) - f(a) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x) dx.$$

Y ahora nos preguntamos: ¿habrá identidades similares para integrales sobre curvas y superficies?

Los teoremas integrales que tratamos en estas notas (Green, Stokes y Gauss) responden a esta pregunta y tienen todos la siguiente forma:

$$(0.2) \quad \int_{\text{borde de un dominio}} \text{función} = \int_{\text{dominio}} \text{combinación de derivadas de la función}$$

Notemos que en esta igualdad estamos hablando de dos integrales de naturaleza diferente. Por ejemplo, cuando estamos en  $\mathbb{R}^2$  y tenemos una curva cerrada que encierra una región (por ejemplo, un disco y su borde) en el lado izquierdo de la igualdad (0.2) integramos sobre la curva que es el borde de la región en cuestión (por ejemplo, sobre la circunferencia); mientras que el lado derecho de (0.2) es una integral en una región de  $\mathbb{R}^2$  como las vistas en Análisis I.

También notemos que (0.1) tiene la forma (0.2) ya que

$$f(b) - f(a)$$

es una "integral" de  $f$  sobre el borde del intervalo  $(a, b)$  mientras que

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x) dx$$

es una integral de una derivada de la función  $f$  dentro del intervalo  $(a, b)$ .

Otro aspecto que aparece en estas notas es que los teoremas integrales tienen multitud de aplicaciones a la física y a las ecuaciones diferenciales. Al final de estas notas incluiremos algunas de estas aplicaciones.

## Capítulo 1

### Teorema de Green

Estamos en el plano,  $\mathbb{R}^2$  y tenemos una curva  $C$  cerrada. El teorema de Green da la relación que existe entre una integral de línea alrededor de una curva cerrada simple  $C$  y una integral doble sobre la región plana  $D$  encerrada por  $C$ . Este teorema debe su nombre al científico británico George Green.

#### 1. Regiones de tipo I, II y III

Empecemos recordando la siguiente definición de los tipos de regiones del plano:

DEFINICIÓN 1.1. Una región  $D$  de  $\mathbb{R}^2$  se dice de **tipo I** si

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a_1 < x < a_2, \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x) \right\}$$

es decir, si  $D$  se puede describir como el conjunto encerrado entre los gráficos de dos funciones de  $x$ ,  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  en el intervalo  $(a_1, a_2)$ .

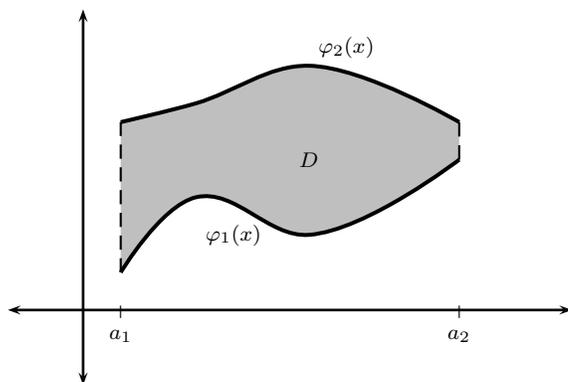


FIGURA 1. Región de tipo I.

Analogamente, una región  $D$  de  $\mathbb{R}^2$  se dice de **tipo II** si

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : b_1 < y < b_2, \phi_1(y) < x < \phi_2(y) \right\}$$

es decir, si  $D$  se puede describir como el conjunto encerrado entre los gráficos de dos funciones de  $y$ ,  $\phi_1$  y  $\phi_2$  en el intervalo  $(b_1, b_2)$ .

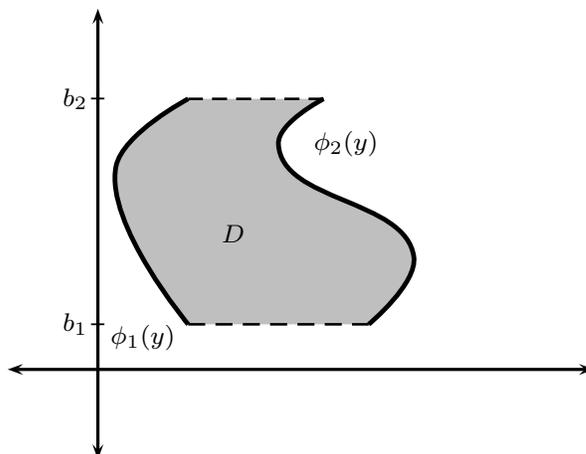


FIGURA 2. Región de tipo II.

Finalmente, una región  $D$  es de **tipo III** si es de tipo I y de tipo II simultáneamente.

EJEMPLO 1.1. La región

$$D_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, [x(x-1)]^2 < y < x(x-1) \right\}$$

es de tipo I, pero no es de tipo II.

El cuadrado

$$D_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a_1 < x < a_2, b_1 < y < b_2 \right\}$$

y el disco unitario

$$D_3 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \right\}$$

son regiones de tipo III.

## 2. Orientaciones de curvas

Como ya anticipamos, el teorema de Green relaciona una integral curvilínea con una integral en el plano y también sabemos que las integrales curvilíneas involucran una orientación de la curva sobre la cual integramos. Lo que vamos a hacer ahora es darle un nombre a las dos posibles orientaciones que existen para una curva cerrada.

DEFINICIÓN 1.2. Una curva cerrada simple  $C$  que es la frontera de una región de tipo I, II o III tiene dos **orientaciones**: una recorriendo la curva en sentido contrario a las agujas del reloj y otra recorriendo la curva en el sentido de las agujas del reloj. A la primera la llamaremos *orientación positiva* y escribiremos  $C^+$  cuando queramos indicar

que la curva  $C$  tiene esta orientación. A la segunda, la llamaremos *orientación negativa* y escribiremos  $C^-$  para denotar que  $C$  tiene esta otra orientación.

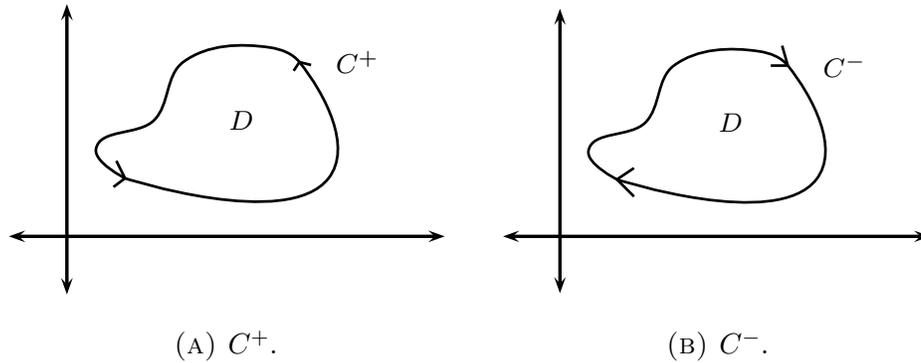


FIGURA 3. Posibles orientaciones para una curva cerrada  $C$ .

Notemos que la orientación positiva también puede reconocerse de la siguiente forma: si se recorre la curva  $C$  caminando en sentido positivo, se deja la región  $D$  que encierra  $C$  a la izquierda.

Supongamos ahora que la curva  $C^+$  (con orientación positiva) encierra una región  $D$  que es de tipo I. Entonces, podemos escribirla como la unión de cuatro curvas,

$$(1.1) \quad C^+ = C_1^+ \cup C_2^- \cup B_1^- \cup B_2^+,$$

donde  $C_1^+$ ,  $C_2^-$ ,  $B_1^-$  y  $B_2^+$  son como se muestra en la Figura 4.

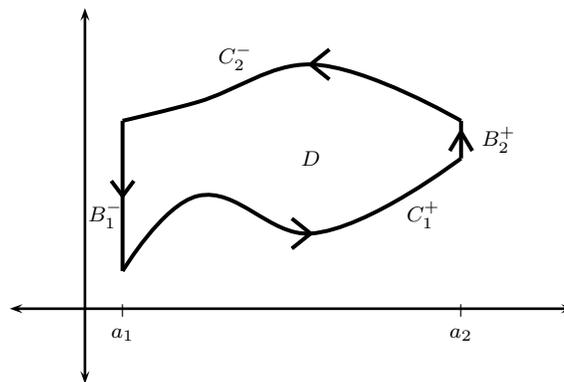


FIGURA 4. Descomposición de  $C^+$  en  $C_1^+ \cup C_2^- \cup B_1^- \cup B_2^+$ .

Más precisamente, si  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a_1 < x < a_2, \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\}$ , entonces  $C_1^+$  es la parte de abajo

$$C_1^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a_1 < x < a_2, y = \varphi_1(x)\}$$

recorrida de izquierda a derecha y  $C_2^-$  es

$$C_2^- = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a_1 < x < a_2, y = \varphi_2(x) \right\}$$

recorrida de derecha a izquierda. Finalmente,  $B_1^-$  es la parte de la izquierda

$$B_1^- = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = a_1, \varphi_1(a_1) < y < \varphi_2(a_1) \right\}$$

recorrida de arriba hacia abajo y  $B_2^+$  es la parte de la derecha

$$B_2^+ = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = a_2, \varphi_1(a_2) < y < \varphi_2(a_2) \right\}$$

recorrida de abajo hacia arriba.

Observemos que  $B_1^-$  o  $B_2^+$  pueden no aparecer en (1.1). Por ejemplo, si  $\varphi_1(a_1) = \varphi_2(a_1)$  entonces  $B_1^-$  no aparece.

Si la región  $D$  es de tipo II, se puede hacer una descomposición similar para la curva que describe su borde. En este caso aparecen dos partes laterales (izquierda y derecha) y pueden aparecer (o no) una parte de arriba y otra de abajo. Sugerimos como ejercicio describir esta descomposición para una región de tipo II.

### 3. Teorema de Green

En esta sección vamos a enunciar y demostrar el Teorema de Green.

**TEOREMA 1.1.** *Sea  $F = (P, Q)$  un campo vectorial de clase  $C^1$  definido en un abierto  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  y sea  $C$  una curva en el plano, cerrada, simple, orientada positivamente y diferenciable por trozos, que encierra una región  $D$  de tipo III que queda contenida en  $\Omega$ . Entonces,*

$$(1.2) \quad \int_{C^+} (P dx + Q dy) = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy.$$

Para demostrar este teorema, notemos lo siguiente:

$$\int_{C^+} (P dx + Q dy) = \int_{C^+} P dx + \int_{C^+} Q dy$$

y

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx dy - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy.$$

Luego, la igualdad (1.2) quedaría probada si vemos que

$$\int_{C^+} P dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy$$

y que

$$\int_{C^+} Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx dy.$$

Esto es lo que vamos a hacer en los próximos dos lemas.

LEMA 1.1. *Sea  $D$  una región de tipo I en el plano y sea  $C^+$  la curva diferenciable por trozos que recorre su frontera orientada positivamente. Entonces, si  $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $\mathcal{C}^1$  se tiene*

$$\int_{C^+} (P, 0) d\sigma = \int_{C^+} P dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy.$$

DEMOSTRACIÓN. Primero calculemos la integral en la región  $D$ . Teniendo en cuenta que  $D$  es de tipo I, podemos suponer que se describe como  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a_1 < x < a_2, \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\}$ . Entonces, por el teorema de Fubini tenemos que

$$\begin{aligned} & - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy \\ (1.3) \quad & = - \int_{a_1}^{a_2} \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy dx \\ & = - \left( \int_{a_1}^{a_2} P(x, \varphi_2(x)) dx - \int_{a_1}^{a_2} P(x, \varphi_1(x)) dx \right) \\ & = \int_{a_1}^{a_2} P(x, \varphi_1(x)) dx - \int_{a_1}^{a_2} P(x, \varphi_2(x)) dx. \end{aligned}$$

Ahora calculemos la integral sobre la curva  $C^+$ . Consideremos la descomposición de la curva  $C^+$  que describimos en la sección anterior,

$$(1.4) \quad C^+ = C_1^+ \cup C_2^- \cup B_1^- \cup B_2^+.$$

Entonces obtenemos

$$\int_{C^+} P dx = \int_{C_1^+} P dx + \int_{C_2^-} P dx + \int_{B_1^-} P dx + \int_{B_2^+} P dx.$$

Calculemos cada una de estas cuatro integrales.

Empecemos por la primera. Parametrizamos  $C_1^+$  según

$$\sigma_1(t) = (t, \varphi_1(t)) \quad t \in (a_1, a_2).$$

Observemos que esta parametrización respeta la orientación, es decir, recorre la curva de izquierda a derecha y que además  $\sigma_1'(t) = (1, \varphi_1'(t))$ . Luego, nos queda que

$$\int_{C_1^+} P dx = \int_{C_1^+} (P, 0) d\sigma = \int_{a_1}^{a_2} P(t, \varphi_1(t)) dt.$$

Ahora para la segunda integral parametrizamos  $C_2^-$  según

$$\sigma_2(t) = (t, \varphi_2(t)) \quad t \in (a_1, a_2).$$

Observemos que esta parametrización recorre la curva de izquierda a derecha y por la orientación que hereda  $C_2^-$  de la orientación positiva de  $C^+$  debemos recorrerla de derecha

a izquierda. Como ya sabemos, la manera de invertir la orientación es agregando un menos en la integral. Teniendo en cuenta también que  $\sigma'_2(t) = (1, \varphi'_2(t))$ , tenemos

$$\int_{C_2^-} P dx = \int_{C_2^-} (P, 0) d\sigma = - \int_{a_1}^{a_2} P(t, \varphi_2(t)) dt.$$

Para  $B_1^-$  (si es que aparece este trozo de curva) consideramos la parametrización

$$\sigma_3(t) = (a_1, t) \quad t \in (\varphi_1(a_1), \varphi(a_2)),$$

que tiene como vector tangente a  $\sigma'_3(t) = (0, 1)$ . Luego,

$$\langle (P(\sigma_3(t)), 0); \sigma'_3(t) \rangle = \langle (P(\sigma_3(t)), 0); (0, 1) \rangle = 0,$$

y por lo tanto

$$\int_{B_1^-} P dx = 0.$$

Un razonamiento análogo permite obtener

$$\int_{B_2^+} P dx = 0.$$

Juntando todas las cuatro integrales de línea, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{C^+} P dx &= \int_{C_1^+} P dx + \int_{C_2^-} P dx + \int_{B_1^-} P dx + \int_{B_2^+} P dx \\ &= \int_{a_1}^{a_2} P(t, \varphi_1(t)) dt - \int_{a_1}^{a_2} P(t, \varphi_2(t)) dt + 0 + 0, \end{aligned}$$

que resulta igual a (1.3) y entonces concluimos

$$\int_{C^+} P dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy,$$

como queríamos demostrar.  $\square$

Análogamente se puede probar el segundo lema,

LEMA 1.2. *Sea  $D$  una región de tipo II en el plano y sea  $C^+$  la curva diferenciable por trozos que recorre su frontera orientada positivamente. Entonces, si  $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^1$  se tiene*

$$\int_{C^+} (0, Q) d\sigma = \int_{C^+} Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx dy.$$

DEMOSTRACIÓN. Ejercicio. Pensar bien porque en este lema no aparece el signo  $-$ .  $\square$

Como mencionamos antes, la combinación de estos 2 lemas termina la demostración del Teorema de Green.

OBSERVACIÓN 1. A veces, la notación

$$\oint_{C^+} (P dx + Q dy)$$

se utiliza para establecer que la integral de línea está calculada usando la orientación positiva de la curva cerrada  $C$ .

El Teorema de Green se puede aplicar a regiones más generales que las de tipo III. Por ejemplo, si una región  $D$  se puede descomponer en una unión disjunta y finita de regiones de tipo III, entonces se puede usar el teorema. Para entender un poco mejor cómo podemos hacer esto consideremos el anillo  $D$  dado por

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Como vamos a querer entender cómo aplicar el teorema en  $D$ , por un lado debemos considerar que su borde está orientado positivamente. Entonces, si lo llamamos  $C^+$  tenemos que  $C^+ = C_1^+ \cup C_2^+$  donde

$$C_1^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 = x^2 + y^2\} \quad \text{y} \quad C_2^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$$

y  $C_1^+$  se recorre horariamente y  $C_2^+$  se recorre antihorariamente (recordemos que para que el borde de una región esté orientado positivamente, al recorrerlo, la región debe quedar a la izquierda).

Por otro lado, notemos que esta región no es de tipo III. Sin embargo podemos descomponerla en regiones de tipo III  $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$  como se muestra en la siguiente figura:

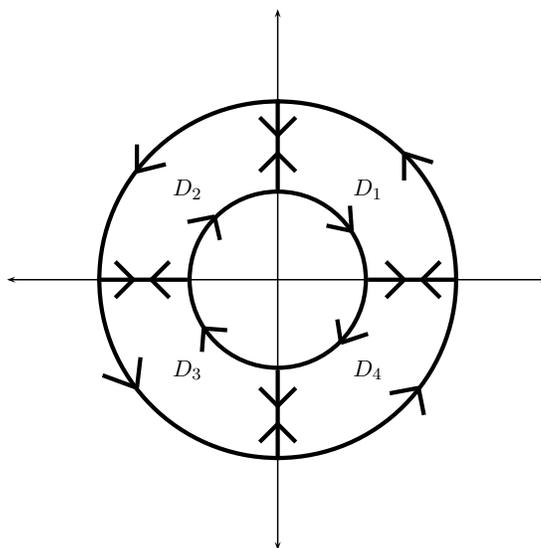


FIGURA 5. Partición de  $D$  en regiones de tipo III.

Ahora bien, es claro que si  $F = (P, Q)$  es un campo  $\mathcal{C}^1$ , entonces

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = \sum_{i=1}^4 \iint_{D_i} \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy.$$

Como cada  $D_i$  es de tipo III, notando como  $\partial D_i^+$  a su borde orientado positivamente, podemos aplicar el Teorema de Green para obtener que

$$\sum_{i=1}^4 \iint_{D_i} \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = \sum_{i=1}^4 \int_{\partial D_i^+} (P dx + Q dy).$$

Luego, el Teorema de Green vale para  $D$  si podemos convencernos de que

$$\sum_{i=1}^4 \int_{\partial D_i^+} (P dx + Q dy) = \int_{\partial D^+} (P dx + Q dy).$$

Pero esta última igualdad es cierta pues cada uno de los segmentos que agregamos para dividir  $D$  en  $D_1, D_2, D_3$  y  $D_4$  se recorre dos veces pero cada una en distinto sentido y por lo tanto las integrales sobre ellos se cancelan.

EJEMPLO 1.2. Veamos como funciona el teorema de Green en el caso en que

$$P(x, y) = x \quad Q(x, y) = xy$$

y  $D$  el disco unitario

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \right\}.$$

Calculemos primero las derivadas de  $P$  y  $Q$  que aparecen en el enunciado del teorema

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = y.$$

Entonces

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = \iint_D y dx dy = 0.$$

Por otra parte, parametrizamos el borde del disco por

$$\sigma(t) = (\cos(t), \sin(t)) \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

Observemos que esta parametrización recorre la curva en sentido antihorario y en consecuencia preserva la orientación positiva. Luego, como

$$\sigma'(t) = (-\sin(t), \cos(t)) \quad 0 \leq t < 2\pi$$

obtenemos

$$\int_{C^+} (P, Q) d\sigma = \int_0^{2\pi} \left( \cos(t)(-\sin(t)) + \sin(t)[\cos(t)]^2 \right) dt = 0.$$

#### 4. Cálculo de áreas

El Teorema de Green resulta muy útil para encontrar una fórmula que nos permite calcular el área de una región a partir de una integral sobre su borde.

TEOREMA 1.2. *Sea  $D$  una región donde vale el teorema de Green, entonces se tiene que*

$$\text{Area}(D) = \iint_D 1 \, dx \, dy = \frac{1}{2} \int_{C^+} -y \, dx + x \, dy.$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración es una consecuencia directa del Teorema de Green aplicado al campo  $F = (P, Q)$  donde

$$P(x, y) = -y, \quad Q(x, y) = x$$

ya que

$$\left( \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) = 2.$$

□

OBSERVACIÓN 2. *Observemos que para calcular un área con el Teorema de Green como se hace en el Teorema 1.2, se puede usar cualquier campo  $F = (P, Q)$  de clase  $C^1$  que verifique que  $\left( \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right)$  es constante.*

#### 5. Formas vectoriales del Teorema de Green

En esta sección daremos dos formas de escribir el Teorema de Green que serán muy útiles para entender los resultados de los próximos capítulos (los que tratan el Teorema de Stokes y el Teorema de Gauss)

Para empezar, vamos a definir el *rotor* y la *divergencia* de un campo vectorial.

DEFINICIÓN 1.3. Sea  $F = (P, Q, R)$  un campo vectorial diferenciable definido en  $\mathbb{R}^3$ . El *rotor de  $F$*  es el campo vectorial definido como

$$\text{rot}(F) := \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, - \left( \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right), \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Una forma fácil de entender cómo se calcula el rotor es mediante determinantes ya que

$$\text{rot}(F) = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, - \left( \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right), \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

El cálculo del rotor usando determinantes induce una notación alternativa que vamos a usar muy seguido. Si notamos por  $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$  entonces

$$\text{rot}(F) = \nabla \times F$$

donde  $\times$  denota el producto vectorial de  $\mathbb{R}^3$ .

Si ahora tenemos un campo  $F = (P, Q)$  en  $\mathbb{R}^2$  podemos calcular su rotor pensando que es un campo en  $\mathbb{R}^3$  con tercer coordenada 0. Es decir  $F = (P, Q, 0)$  y ni  $P$  ni  $Q$  dependen de la variable  $z$ . Luego

$$\nabla \times F(x, y, z) = \left( 0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right).$$

Usualmente abusamos de la notación para indicar el rotor *escalar* de  $F = (P, Q)$  directamente como  $\text{rot}(F) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ .

DEFINICIÓN 1.4. Sea  $F = (P, Q, R)$  un campo vectorial diferenciable definido en  $\mathbb{R}^3$ . La *divergencia de  $F$*  se definido como

$$\text{div}(F) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Una notación que vamos a usar para la divergencia de un campo es la que resulta de pensar a la divergencia como el producto interno entre  $\nabla$  y  $F$ . Esto es,

$$\text{div}(F) = \langle \nabla, F \rangle = \nabla \cdot F.$$

Si el campo  $F$  esta definido en  $\mathbb{R}^2$  con coordenadas  $P$  y  $Q$  entonces su divergencia queda

$$\text{div}(F)(x, y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y).$$

Una relación interesante entre la divergencia y el rotor de una campo es la siguiente:

PROPOSICIÓN 5.1. *Sea  $F$  un campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^2$  definido  $\mathbb{R}^3$ . Entonces*

$$\text{div}(\text{rot}(F)) = \nabla \cdot (\nabla \times F) = 0.$$

La demostración se consecuencia de que las derivadas cruzadas de un campo de clase  $\mathcal{C}^2$  coinciden y los detalles quedan como ejercicio.

Ahora si podemos enunciar y demostrar las versiones vectoriales del Teorema de Green.

TEOREMA 1.3 (Forma vectorial del Teorema de Green). *Sea  $D \subset \mathbb{R}^2$  una región donde vale Green y sea  $F = (P, Q)$  un campo vectorial  $\mathcal{C}^1$ . Entonces*

$$\iint_D \text{rot}(F) = \iint_D \nabla \times F \cdot (0, 0, 1) dS = \int_{(\partial D)^+} (P, Q) d\sigma.$$

DEMOSTRACIÓN. Teniendo en cuenta que mencionamos más arriba sobre el rotor escalar

$$\text{rot}(F) = \langle \nabla \times F; (0, 0, 1) \rangle = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y),$$

basta plicar el Teorema de Green para obtener

$$\begin{aligned} \iint_D \text{rot}(F) &= \iint_D \nabla \times F \cdot (0, 0, 1) dS \\ &= \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy = \int_{(\partial D)^+} (P, Q). \end{aligned}$$

□

TEOREMA 1.4 (Teorema de la Divergencia en el plano). *Sea  $D$  una región de  $\mathbb{R}^2$  donde vale el Teorema de Green y sea  $\eta$  la normal exterior al  $\partial D$ . Si  $F = (P, Q)$  un campo vectorial  $C^1$ , entonces,*

$$(1.5) \quad \int_{\partial D} F \cdot \eta = \iint_D \text{div}(F).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\sigma(t) = (x(t), y(t))$  una parametrización del borde de  $D$  que da la orientación positiva, entonces vale que

$$\eta(\sigma(t)) = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}$$

resulta ser la normal unitaria al borde de  $D$  apuntando hacia afuera. Esto se puede probar pero no lo vamos a hacer en este apunte.

Recordemos que

$$\text{div}(F)(x, y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y)$$

y entonces

$$\iint_D \text{div}(F) = \iint_D \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) dx dy.$$

Por otra parte, usando la parametrización del borde  $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} F \cdot \eta &= \int_a^b \langle (P(\sigma(t)), Q(\sigma(t))); \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \rangle \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \\ &= \int_a^b P(\sigma(t))y'(t) - Q(\sigma(t))x'(t) dt = \int_a^b -Q dx + P dy \\ &= \iint_D \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

En la última igualdad hemos usado el Teorema de Green. □



## Capítulo 2

### Teorema de Stokes

El teorema al que nos vamos a dedicar en este capítulo se nombra así por George Gabriel Stokes (1819-1903) y relaciona la integral de superficie del rotor de un campo vectorial sobre una superficie  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  con la integral de línea del campo vectorial sobre su borde. De esta manera y teniendo en cuenta el Teorema 1.3, podemos interpretar el teorema de Stokes como una extensión del Teorema de Green a  $\mathbb{R}^3$  para superficies no planas.

Aquí surge la dificultad de orientar el borde de una superficie de  $\mathbb{R}^3$ . Esto se debe a que al tener 3 dimensiones, la idea que usábamos en  $\mathbb{R}^2$  de “caminando por el borde de la superficie, la dejamos a nuestra izquierda” depende ahora de “hacia dónde apunta nuestra cabeza”, como se muestra en la Figura 1.

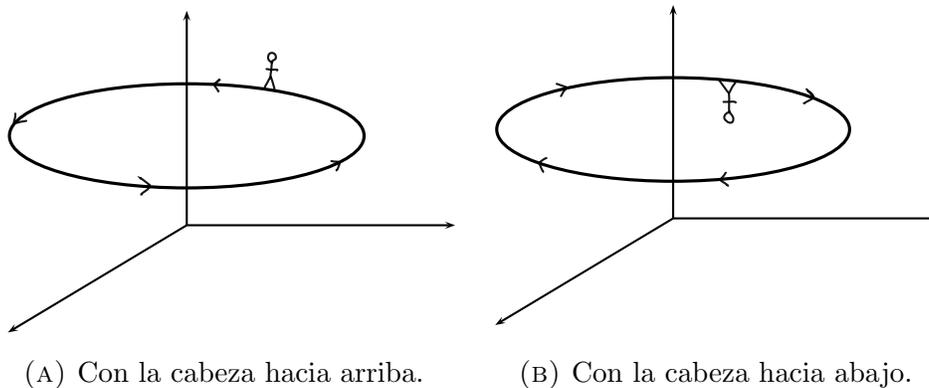


FIGURA 1. Posibles orientaciones para el borde de una superficie en  $\mathbb{R}^3$ .

Para evitar esta ambigüedad vamos a considerar que si  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  es una superficie con cierta normal  $\eta$ , entonces la orientación positiva de  $\partial S$ , que como siempre vamos a notar por  $\partial S^+$ , es aquella que se obtiene si al caminar por  $\partial S$  con la cabeza apuntando en el mismo sentido que la normal  $\eta$ , dejamos la superficie  $S$  a nuestra izquierda. La formalización de esta idea geométrica en términos de parametrizaciones es como sigue:

Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie y  $T : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización regular de  $S$ . Es decir,  $T(D) = S$ ,  $T$  es inyectiva, de clase  $\mathcal{C}^1$  y tal que  $T_u \times T_v \neq (0, 0, 0)$ . Consideremos la orientación que  $T$  induce en  $S$  con su normal  $\eta_T$ . Supongamos además que  $D$  es una región del plano donde vale el Teorema de Green y que  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una parametrización regular a trozos de  $\partial D^+$ , es decir, con orientación positiva.

Luego,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\gamma := T \circ \sigma$$

es una parametrización regular a trozos de  $\partial S$ . Lo importante de esta parametrización (pero que no vamos a demostrar) es que da la orientación correcta a  $\partial S$ . Es decir,  $\gamma$  parametriza  $\partial S^+$ , dándole la orientación positiva compatible con  $\eta_T$ .

Una vez entendido esto, estamos en condiciones de enunciar el Teorema de Stokes.

**TEOREMA 2.1.** *Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie y  $T : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización regular de  $S$  donde  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  es una región donde vale el Teorema de Green. Supongamos que  $T$  es de clase  $\mathcal{C}^2$  y que  $\partial S^+$  es la orientación del borde de  $S$  dada por  $T(\partial D^+)$  que describimos arriba.*

*Si  $F$  es un campo de clase  $\mathcal{C}^1$  definido en  $S$ , entonces*

$$(2.1) \quad \iint_S \text{rot}(\mathbf{F}) = \iint_S \langle \nabla \times \mathbf{F}, \eta \rangle dS = \int_{\partial S^+} \mathbf{F} d\sigma.$$

La demostración de este teorema la vamos a hacer en las siguientes secciones primero para el caso en que  $S$  es la gráfica de una función y luego para el caso general.

### 1. Demostración del Teorema de Stokes para gráficas

Empecemos por una versión del Teorema de Stokes para superficies que son el gráfico de una función. Es decir, supongamos que  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $\mathcal{C}^2$  y que

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, z = f(x, y)\}.$$

Para una superficie de esta forma podemos usar la parametrización  $T : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$T(u, v) = (u, v, f(u, v)) \quad (u, v) \in D.$$

Luego,  $T$  es también de clase  $\mathcal{C}^2$  y como

$$T_u = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}(u, v)\right), \quad T_v = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)\right),$$

resulta que

$$T_u \times T_v(u, v) = \left(-\frac{\partial f}{\partial u}(u, v), -\frac{\partial f}{\partial v}(u, v), 1\right)$$

que es un vector normal a la superficie. Observar que esta normal apunta “hacia arriba” ya que la última coordenada es positiva.

Entonces, dado un campo vectorial

$$F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$$

y su rotor

$$\text{rot}(F)(x, y, z) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right),$$

el flujo de  $\text{rot}(F)$  a través de la superficie  $S$  orientada con la normal dada por  $T_u \times T_v$  viene dado por

$$\begin{aligned}
 \iint_S \text{rot}(F) &= \iint_D \langle \text{rot}(F)(\Phi(u, v)); T_u \times T_v(u, v) \rangle du dv \\
 (2.2) \qquad &= - \iint_D \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) (u, v, f(u, v)) \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) du dv \\
 &\quad - \iint_D \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) (u, v, f(u, v)) \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) du dv \\
 &\quad + \iint_D \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) (u, v, f(u, v)) du dv.
 \end{aligned}$$

Por otra parte, el borde de  $D$  lo supondremos parametrizado por  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\sigma(t) = (u(t), v(t))$ , y además supondremos que  $\sigma$  recorre el borde de  $D$  en sentido positivo. Como discutimos al principio de este capítulo, la parametrización  $\sigma$  de  $\partial D^+$  induce la parametrización  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  del borde de  $S$ , dada por

$$\gamma(t) = (u(t), v(t), f(u(t), v(t))),$$

que orienta a  $\partial S$  positivamente en relación a  $T_u \times T_v$ .

Usando  $\gamma$  para calcular  $\int_{\partial S^+} F d\sigma$  y teniendo en cuenta que

$$\gamma'(t) = \left( u'(t), v'(t), \frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t))u'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t))v'(t) \right),$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial S^+} F &= \int_a^b \langle (F_1, F_2, F_3)\gamma(t), \gamma'(t) \rangle dt \\
 &= \int_a^b F_1(u(t), v(t), f(u(t), v(t)))u'(t) dt \\
 &\quad + \int_a^b F_2(u(t), v(t), f(u(t), v(t)))v'(t) dt \\
 &\quad + \int_a^b F_3(u(t), v(t), f(u(t), v(t))) \left( \frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t))u'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t))v'(t) \right) dt \\
 &= \int_a^b \left( F_1(u(t), v(t), f(u(t), v(t))) + F_3(u(t), v(t), f(u(t), v(t))) \frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t)) \right) u'(t) dt \\
 &\quad + \int_a^b \left( F_2(u(t), v(t), f(u(t), v(t))) + F_3(u(t), v(t), f(u(t), v(t))) \frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t)) \right) v'(t) dt \\
 &= \int_{\partial D^+} G d\sigma
 \end{aligned}$$

con  $G = (G_1, G_2)$  donde

$$G_1(u, v) = F_1(u, v, f(u, v)) + F_3(u, v, f(u, v)) \frac{\partial f}{\partial x}(u, v)$$

y

$$G_2(u, v) = F_2(u, v, f(u, v)) + F_3(u, v, f(u, v)) \frac{\partial f}{\partial y}(u, v).$$

Ahora bien, como  $D$  es una región donde vale el Teorema de Green, podemos usarlo y obtener

$$(2.3) \quad \int_{\partial D^+} G d\sigma = \iint_D \frac{\partial G_2}{\partial u}(u, v) - \frac{\partial G_1}{\partial v}(u, v) du dv.$$

Armándonos de paciencia, calculamos  $\frac{\partial G_2}{\partial u}(u, v)$  y  $\frac{\partial G_1}{\partial v}(u, v)$  usando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_2}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial}{\partial u} \left( F_2(u, v, f(u, v)) + F_3(u, v, f(u, v)) \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \right) \\ &= \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial F_3}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} + F_3(u, v, f(u, v)) \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_1}{\partial v}(u, v) &= \frac{\partial}{\partial v} \left( F_1(u, v, f(u, v)) + F_3(u, v, f(u, v)) \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \right) \\ &= \frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial F_3}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial u} + F_3(u, v, f(u, v)) \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}. \end{aligned}$$

Restando estas dos expresiones y teniendo en cuenta que  $f$  es de clase  $\mathcal{C}^2$ , nos queda

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_2}{\partial u}(u, v) - \frac{\partial G_1}{\partial v}(u, v) &= \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial F_3}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial F_3}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial u} \\ &= \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} + \left( \frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial y} \right) \frac{\partial f}{\partial u} + \left( \frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \right) \frac{\partial f}{\partial v}. \end{aligned}$$

Luego, reemplazando en (2.3) obtenemos que

$$\int_{\partial S^+} F d\sigma = \int_{\partial D^+} G d\sigma = \iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} + \left( \frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial y} \right) \frac{\partial f}{\partial u} + \left( \frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \right) \frac{\partial f}{\partial v}$$

y esto último es igual a  $\iint_S \text{rot}(F)$  gracias a (2.2), lo que termina la demostración para el caso de gráficas.

## 2. Demostración de Stokes (caso general, superficies parametrizadas)

Ahora haremos la demostración para una superficie parametrizada  $S$  que no difiere mucho de la que hicimos para gráficas, pero que involucra un poco más de notación. Supongamos entonces que  $T : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$

$$T(u, v) = (a_1(u, v), a_2(u, v), a_3(u, v))$$

es una parametrización regular y  $\mathcal{C}^2$  de  $S$  que la orienta y que  $D$  es una región de  $\mathbb{R}^2$  donde vale el Teorema de Green. Además supondremos que el borde de  $D$  viene parametrizado por

$$\sigma(t) = (u(t), v(t)) \quad t \in [a, b]$$

y que esta parametrización orienta a  $\partial D$  positivamente. Luego, como vimos al principio de este capítulo,

$$(2.4) \quad \gamma(t) := T(\sigma(t)) = (a_1(u(t), v(t)), a_2(u(t), v(t)), a_3(u(t), v(t))), \quad t \in [a, b],$$

es una orientación de  $\partial S^+$ .

Lo que vamos a hacer es aplicar la misma estrategia que en el caso de gráficas. Es decir, vamos a calcular directamente  $\iint_S \text{rot}(F)$  y  $\int_{\partial S^+} F d\sigma$  usando las parametrizaciones anteriores y ver que obtenemos lo mismo.

Empecemos por  $\iint_S \text{rot}(F)$ .

Como

$$T_u = \left( \frac{\partial a_1}{\partial u}, \frac{\partial a_2}{\partial u}, \frac{\partial a_3}{\partial u} \right), \quad T_v = \left( \frac{\partial a_1}{\partial v}, \frac{\partial a_2}{\partial v}, \frac{\partial a_3}{\partial v} \right),$$

tenemos que

$$\begin{aligned} T_u \times T_v(u, v) &= \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial a_1}{\partial u} & \frac{\partial a_2}{\partial u} & \frac{\partial a_3}{\partial u} \\ \frac{\partial a_1}{\partial v} & \frac{\partial a_2}{\partial v} & \frac{\partial a_3}{\partial v} \end{pmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial a_2}{\partial u} \frac{\partial a_3}{\partial v} - \frac{\partial a_3}{\partial u} \frac{\partial a_2}{\partial v}, \frac{\partial a_1}{\partial v} \frac{\partial a_3}{\partial u} - \frac{\partial a_1}{\partial u} \frac{\partial a_3}{\partial v}, \frac{\partial a_1}{\partial u} \frac{\partial a_2}{\partial v} - \frac{\partial a_2}{\partial u} \frac{\partial a_1}{\partial v} \right). \end{aligned}$$

Dado el campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^1$

$$F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$$

y su rotor

$$\text{rot}(F)(x, y, z) = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right),$$

el flujo de  $\text{rot}(F)$  a través de  $S$  orientada con la normal dada por  $T_u \times T_v$  viene dado por

$$\begin{aligned}
 \iint_S \text{rot}(F) &= \iint_D \langle \text{rot}(F)(T(u, v)); T_u \times T_v(u, v) \rangle du dv \\
 (2.5) \qquad &= \iint_D \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial a_2}{\partial u} \frac{\partial a_3}{\partial v} - \frac{\partial a_3}{\partial u} \frac{\partial a_2}{\partial v} \right) du dv \\
 &\quad + \iint_D \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial a_1}{\partial v} \frac{\partial a_3}{\partial u} - \frac{\partial a_1}{\partial u} \frac{\partial a_3}{\partial v} \right) du dv \\
 &\quad + \iint_D \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial a_1}{\partial u} \frac{\partial a_2}{\partial v} - \frac{\partial a_2}{\partial u} \frac{\partial a_1}{\partial v} \right) du dv.
 \end{aligned}$$

Por otra parte, tenemos que la derivada de la parametrización  $\gamma$  definida en (2.4) es

$$\gamma'(t) = \left( \frac{\partial a_1}{\partial u} u' + \frac{\partial a_1}{\partial v} v', \frac{\partial a_2}{\partial u} u' + \frac{\partial a_2}{\partial v} v', \frac{\partial a_3}{\partial u} u' + \frac{\partial a_3}{\partial v} v' \right).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial S^+} F d\sigma &= \int_a^b \langle (F_1, F_2, F_3) \gamma(t), \gamma'(t) \rangle dt \\
 &= \int_a^b F_1(\gamma(t)) \left( \frac{\partial a_1}{\partial u} u' + \frac{\partial a_1}{\partial v} v' \right) dt \\
 &\quad + \int_a^b F_2(\gamma(t)) \left( \frac{\partial a_2}{\partial u} u' + \frac{\partial a_2}{\partial v} v' \right) dt \\
 &\quad + \int_a^b F_3(\gamma(t)) \left( \frac{\partial a_3}{\partial u} u' + \frac{\partial a_3}{\partial v} v' \right) dt \\
 &= \int_a^b \left( F_1 \frac{\partial a_1}{\partial u} + F_2 \frac{\partial a_2}{\partial u} + F_3 \frac{\partial a_3}{\partial u} \right) u'(t) dt \\
 &\quad + \int_a^b \left( F_1 \frac{\partial a_1}{\partial v} + F_2 \frac{\partial a_2}{\partial v} + F_3 \frac{\partial a_3}{\partial v} \right) v'(t) dt \\
 &= \int_{\partial D^+} G d\sigma
 \end{aligned}$$

con  $G = (G_1, G_2)$  donde

$$\begin{aligned}
 G_1(u, v) &= F_1(a_1(u, v), a_2(u, v), a_3(u, v)) \frac{\partial a_1}{\partial u}(u, v) \\
 &\quad + F_2(a_1(u, v), a_2(u, v), a_3(u, v)) \frac{\partial a_2}{\partial u}(u, v) + F_3(a_1(u, v), a_2(u, v), a_3(u, v)) \frac{\partial a_3}{\partial u}(u, v).
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 G_2(u, v) &= F_1(a_1(u, v), a_2(u, v), a_3(u, v)) \frac{\partial a_1}{\partial v}(u, v) \\
 &\quad + F_2(a_1(u, v), a_2(u, v), a_3(u, v)) \frac{\partial a_2}{\partial v}(u, v) + F_3(a_1(u, v), a_2(u, v), a_3(u, v)) \frac{\partial a_3}{\partial v}(u, v).
 \end{aligned}$$

Ahora bien, como  $D$  es una región donde vale el Teorema de Green, podemos usarlo y obtener

$$\int_{\partial D} G d\sigma = \iint_D \frac{\partial G_2}{\partial u}(u, v) - \frac{\partial G_1}{\partial v}(u, v) du dv.$$

Para calcular las derivadas  $\frac{\partial G_2}{\partial u}$  y  $\frac{\partial G_1}{\partial v}$  nos volvemos a armar de paciencia y aplicamos la regla de la cadena para obtener

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_2}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial}{\partial u} \left( F_1(a_1(u, v), a_2(u, v), a_3(u, v)) \frac{\partial a_1}{\partial v}(u, v) \right. \\ &\quad \left. + F_2(a_1(u, v), a_2(u, v), a_3(u, v)) \frac{\partial a_2}{\partial v}(u, v) + F_3(a_1(u, v), a_2(u, v), a_3(u, v)) \frac{\partial a_3}{\partial v}(u, v) \right). \\ &= F_1 \frac{\partial^2 a_1}{\partial v \partial u} + \frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial a_1}{\partial u} \frac{\partial a_1}{\partial v} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial a_2}{\partial u} \frac{\partial a_1}{\partial v} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial a_3}{\partial u} \frac{\partial a_1}{\partial v} \\ &\quad + F_2 \frac{\partial^2 a_2}{\partial v \partial u} + \frac{\partial F_2}{\partial x} \frac{\partial a_1}{\partial u} \frac{\partial a_2}{\partial v} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \frac{\partial a_2}{\partial u} \frac{\partial a_2}{\partial v} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \frac{\partial a_3}{\partial u} \frac{\partial a_2}{\partial v} \\ &\quad + F_3 \frac{\partial^2 a_3}{\partial v \partial u} + \frac{\partial F_3}{\partial x} \frac{\partial a_1}{\partial u} \frac{\partial a_3}{\partial v} + \frac{\partial F_3}{\partial y} \frac{\partial a_2}{\partial u} \frac{\partial a_3}{\partial v} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \frac{\partial a_3}{\partial u} \frac{\partial a_3}{\partial v}. \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_1}{\partial v}(u, v) &= \frac{\partial}{\partial v} \left( F_1(a_1(u, v), a_2(u, v), a_3(u, v)) \frac{\partial a_1}{\partial u}(u, v) \right. \\ &\quad \left. + F_2(a_1(u, v), a_2(u, v), a_3(u, v)) \frac{\partial a_2}{\partial u}(u, v) + F_3(a_1(u, v), a_2(u, v), a_3(u, v)) \frac{\partial a_3}{\partial u}(u, v) \right). \\ &= F_1 \frac{\partial^2 a_1}{\partial v \partial u} + \frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial a_1}{\partial v} \frac{\partial a_1}{\partial u} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial a_2}{\partial v} \frac{\partial a_1}{\partial u} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial a_3}{\partial v} \frac{\partial a_1}{\partial u} \\ &\quad + F_2 \frac{\partial^2 a_2}{\partial v \partial u} + \frac{\partial F_2}{\partial x} \frac{\partial a_1}{\partial v} \frac{\partial a_2}{\partial u} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \frac{\partial a_2}{\partial v} \frac{\partial a_2}{\partial u} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \frac{\partial a_3}{\partial v} \frac{\partial a_2}{\partial u} \\ &\quad + F_3 \frac{\partial^2 a_3}{\partial v \partial u} + \frac{\partial F_3}{\partial x} \frac{\partial a_1}{\partial v} \frac{\partial a_3}{\partial u} + \frac{\partial F_3}{\partial y} \frac{\partial a_2}{\partial v} \frac{\partial a_3}{\partial u} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \frac{\partial a_3}{\partial v} \frac{\partial a_3}{\partial u}. \end{aligned}$$

Entonces, usando que  $T$  es de clase  $\mathcal{C}^2$  tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_2}{\partial u}(u, v) - \frac{\partial G_1}{\partial v}(u, v) &= \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial a_2}{\partial u} \frac{\partial a_3}{\partial v} - \frac{\partial a_3}{\partial u} \frac{\partial a_2}{\partial v} \right) \\ &\quad + \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial a_1}{\partial v} \frac{\partial a_3}{\partial u} - \frac{\partial a_1}{\partial u} \frac{\partial a_3}{\partial v} \right) \\ &\quad + \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial a_1}{\partial u} \frac{\partial a_2}{\partial v} - \frac{\partial a_2}{\partial u} \frac{\partial a_1}{\partial v} \right). \end{aligned}$$

Combinando todo esto y teniendo en cuenta (2.5), concluimos que

$$\begin{aligned}
\int_{\partial S^+} F d\sigma &= \iint_D \frac{\partial G_2}{\partial u}(u, v) - \frac{\partial G_1}{\partial v}(u, v) du dv \\
&= \iint_D \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial a_2}{\partial u} \frac{\partial a_3}{\partial v} - \frac{\partial a_3}{\partial u} \frac{\partial a_2}{\partial v} \right) du dv \\
&\quad + \iint_D \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial a_1}{\partial v} \frac{\partial a_3}{\partial u} - \frac{\partial a_1}{\partial u} \frac{\partial a_3}{\partial v} \right) du dv \\
&\quad + \iint_D \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial a_1}{\partial u} \frac{\partial a_2}{\partial v} - \frac{\partial a_2}{\partial u} \frac{\partial a_1}{\partial v} \right) du dv \\
&= \iint_S \text{rot}(F),
\end{aligned}$$

lo que termina la demostración.

## Capítulo 3

### Teorema de los campos conservativos

Recordemos que cuando  $F$  es un campo gradiente, es decir, existe  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  con

$$F = \nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right),$$

y  $C$  es una curva orientada que empieza en un punto  $p$  y termina en un punto  $q$ , entonces  $\int_C F d\sigma = f(q) - f(p)$ . Esto se debe a que si  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una parametrización de  $C$ , entonces

$$\int_C F d\sigma = \int_C \nabla f d\sigma = \int_a^b \langle \nabla f(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} (f \circ \sigma)(t) dt = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)),$$

y  $\sigma(a) = p$  y  $\sigma(b) = q$ . Es decir, la integral solo depende de los extremos de la curva. Esto motiva la siguiente definición:

**DEFINICIÓN 3.1.** Sea  $F$  un campo vectorial  $\mathcal{C}^1$  definido en  $\mathbb{R}^3$  salvo, quizás, en un número finito de puntos. Decimos que  $F$  es un *campo conservativo* si se cumple que

$$\int_{C_1} F d\sigma = \int_{C_2} F d\sigma$$

para todo par de curvas  $C_1, C_2$  simples, suaves a trozos y que terminan y empiezan en los mismos puntos.

Recordemos que  $\int_C F d\sigma$  mide el trabajo del campo  $F$  al recorrer la curva  $C$ . Luego, la definición anterior dice que el trabajo realizado por  $F$  se conserva independientemente del camino y de ahí el nombre de “campo conservativo”.

Como vimos, los campos gradientes son ejemplos de campos conservativos. La pregunta es si hay campos conservativos que no sean campos gradientes. En lo que resta de este capítulo nos vamos a encargar de responder esta pregunta.

**TEOREMA 3.1.** Sea  $F$  un campo vectorial  $\mathcal{C}^1$  en  $\mathbb{R}^3$  excepto tal vez en un número finito de puntos. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. Para cualquier curva cerrada simple y suave a trozos  $C$  se tiene

$$\int_C F d\sigma = 0.$$

2. Para cualquier par de curvas simples, suaves a trozos  $C_1$ ,  $C_2$ , con los mismos extremos y la misma orientación se tiene

$$\int_{C_1} F d\sigma = \int_{C_2} F d\sigma.$$

3.  $F$  es el gradiente de alguna función  $f$ ,

$$F = \nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right),$$

4.  $F$  tiene rotor cero,

$$\text{rot}(F) = \nabla \times F = (0, 0, 0).$$

OBSERVACIÓN 3. La condición 2 del teorema dice que  $F$  es un campo conservativo y por lo tanto, una vez probado, tendremos 4 posibles definiciones equivalentes para campos conservativos.

DEMOSTRACIÓN. Probaremos las siguientes implicaciones

$$1 \implies 2 \implies 3 \implies 4 \implies 1.$$

$1 \implies 2$ . Dadas dos curvas simples orientadas  $C_1$ ,  $C_2$ , con los mismos extremos y la misma orientación consideremos la curva  $C$  compuesta por  $C_1$  y  $-C_2$  ( $C_2$  recorrida en sentido inverso). Esta curva  $C$  resulta ser una curva cerrada así que por 1. se tiene

$$0 = \int_C F d\sigma = \int_{C_1} F d\sigma - \int_{C_2} F d\sigma,$$

y concluimos 2., es decir,

$$\int_{C_1} F d\sigma = \int_{C_2} F d\sigma.$$

$2 \implies 3$ . Fijemos un punto de  $\mathbb{R}^3$  (por ejemplo, el origen,  $(0, 0, 0)$ ). Dado otro punto cualquiera  $(x, y, z)$  definimos

$$f(x, y, z) := \int_C F d\sigma$$

para una curva  $C$  cualquiera que va de  $(0, 0, 0)$  hasta  $(x, y, z)$ . Gracias a 2. esta función  $f$  esta bien definida (ya que la integral de  $F$  solo depende de los extremos de la curva y no del camino que los conecta).

Veamos que

$$\nabla f(x, y, z) = F(x, y, z).$$

Para esto, consideremos la curva

$$C_1 = C_x \cup C_y \cup C_z$$

donde  $C_x$ ,  $C_y$  y  $C_z$  están parametrizadas por

$$C_x : \quad \gamma_x(t) = (t, 0, 0), \quad t \in [0, x],$$

$$C_y : \quad \gamma_y(t) = (x, t, 0), \quad t \in [0, y],$$

$$C_z : \quad \gamma_z(t) = (x, y, t), \quad t \in [0, z].$$

Observemos que la curva  $C_1$  va de  $(0, 0, 0)$  a  $(x, y, z)$  ya que  $C_x$  va de  $(0, 0, 0)$  a  $(x, 0, 0)$ , luego  $C_y$  va de  $(x, 0, 0)$  a  $(x, y, 0)$  y finalmente  $C_z$  va de  $(x, y, 0)$  a  $(x, y, z)$  como se muestra en la Figura 1.

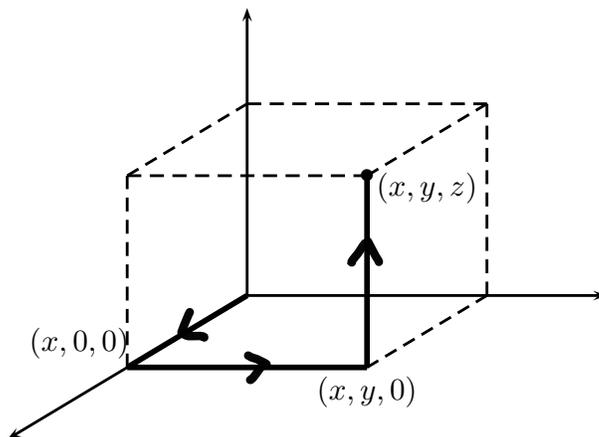


FIGURA 1. Recorrido de la curva  $C_1$ .

Usando la curva  $C_1$  y llamando  $F_1, F_2, F_3$  a las coordenadas de  $F$  obtenemos que

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \int_{C_1} F \, d\sigma = \int_{C_x} F \, d\sigma + \int_{C_y} F \, d\sigma + \int_{C_z} F \, d\sigma \\ &= \int_0^x F_1(t, 0, 0) \, dt + \int_0^y F_2(x, t, 0) \, dt + \int_0^z F_3(x, y, t) \, dt. \end{aligned}$$

Si ahora calculamos la derivada de  $f$  respecto a  $z$  notando que solo la última integral depende de  $z$ , vemos que

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = F_3(x, y, z).$$

Eligiendo curvas apropiadas y haciendo razonamientos similares se prueban las otras 2 derivadas

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = F_1(x, y, z), \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = F_2(x, y, z).$$

Los detalles quedan como ejercicios. En la Figura 2 se sugiere cómo elegir las curvas que resultan apropiadas para probar las derivadas que faltan.

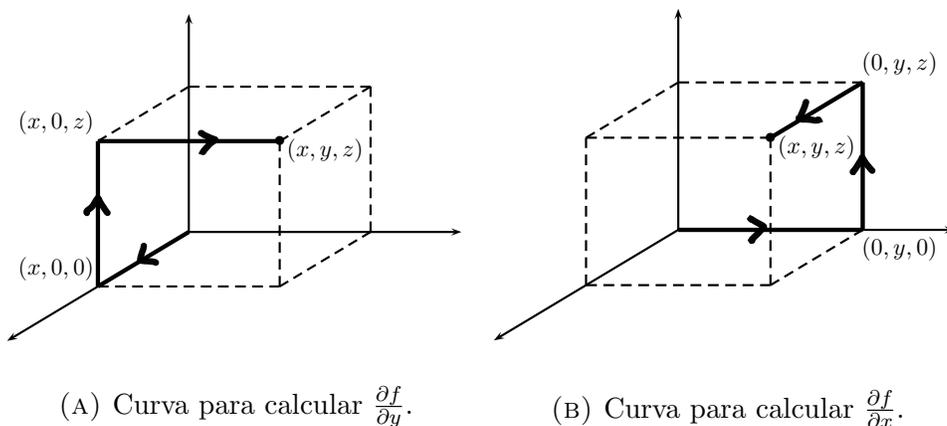


FIGURA 2. Curvas para calcular las derivadas que quedan como ejercicio.

3  $\implies$  4. Supongamos que  $\nabla f(x, y, z) = F(x, y, z)$  y calculemos su rotor. Se tiene que

$$\text{rot}(F) = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right).$$

Como  $F$  es de clase  $\mathcal{C}^1$ , resulta que  $f$  es de clase  $\mathcal{C}^2$  y por lo tanto las derivadas cruzadas de orden 2 de  $f$  coinciden. Esto prueba que  $\text{rot}(F) = (0, 0, 0)$ .

4  $\implies$  1. Dada una curva cerrada y orientada  $C$  tomemos una superficie  $S$  tal que su borde sea  $C$ , de decir,  $\partial S = C$  y que  $F$  resulte  $\mathcal{C}^1$  en  $S$ . Notemos que esto se puede hacer porque  $F$  es  $\mathcal{C}^1$  salvo quizás en finitos puntos y entonces sólo tenemos que esquivarlos. Orientemos ahora  $S$  de forma que su orientación sea compatible con la orientación de  $C$ , es decir que  $C = \partial S^+$ . Entonces, gracias al Teorema de Stokes, tenemos

$$\int_C F d\sigma = \int_{\partial S^+} F d\sigma = \iint_S \text{rot}(F) = 0$$

y así tenemos que vale 1. □

Notemos que la demostración de la implicación 2  $\implies$  3 del teorema anterior da una manera de encontrar  $f$  tal que  $F = \nabla f$ :

EJEMPLO 3.1. Sea  $F(x, y, z) = (y, z \cos(yz) + x, y \cos(yz))$ . Como  $F$  es  $\mathcal{C}^1$  y  $\text{rot}(F) = (0, 0, 0)$ , por el Teorem 3.1 tiene que existir  $f$  tal que  $F = \nabla f$ . Más aún,  $f$  viene dada por

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \int_0^x F_1(t, 0, 0) dt + \int_0^y F_2(x, t, 0) dt + \int_0^z F_3(x, y, t) dt \\ &= \int_0^x 0 dt + \int_0^y x dt + \int_0^z y \cos(yt) dt \\ &= xy + \cos(yz). \end{aligned}$$

Notemos que para cualquier  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\tilde{f} := f + c$  también cumple que  $\nabla \tilde{f} = F$ .

También podemos tratar de hallar  $f$  tal que  $F = \nabla f$  “a mano” como en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.2. Consideremos

$$F(x, y, z) = (y, x + z \cos(yz), y \cos(yz) + 2z)$$

y notemos (haciendo la cuenta) que  $\text{rot}(F) = (0, 0, 0)$ . Como  $F$  es  $\mathcal{C}^1$ , por el Teorem 3.1 existe  $f$  tal que  $F = \nabla f$ .

Intentemos calcular  $f$  a mano. Debemos tener que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= F_1(x, y, z) = y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= F_2(x, y, z) = x + z \cos(yz) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= F_3(x, y, z) = y \cos(yz) + 2z. \end{aligned}$$

Integrando una vez respecto de  $x$  en la primera igualdad obtenemos

$$(3.1) \quad f(x, y, z) = xy + C(y, z),$$

donde la constante de integración  $C(y, z)$  puede ser cualquier función que dependa de  $(y, z)$  ya que estamos calculando la integral respecto a  $x$ .

Ahora pasemos a la segunda igualdad (la que involucra  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ). De (3.1) obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial(xy + C(y, z))}{\partial y} = x + \frac{\partial C}{\partial y}(y, z) = x + z \cos(yz).$$

Luego, queremos

$$\frac{\partial C}{\partial y}(y, z) = z \cos(yz).$$

Integrando una vez respecto a  $y$  nos queda

$$C(y, z) = \sin(yz) + K(z)$$

donde en este caso la constante de integración puede ser cualquier función de  $z$ .

Volviendo a (3.1) nos queda

$$(3.2) \quad f(x, y, z) = xy + \sin(yz) + K(z).$$

Ahora vamos a la última ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial(xy + \sin(yz) + K(z))}{\partial y} = y \cos(yz) + \frac{\partial K}{\partial z}(z) = y \cos(yz) + 2z.$$

Y entonces queremos

$$\frac{\partial K}{\partial z}(z) = 2z$$

lo que nos da

$$K(z) = z^2 + c$$

con  $c$  una constante cualquiera. Volviendo a (3.2) nos queda la  $f$  que buscábamos es

$$f(x, y, z) = xy + \sin(yz) + z^2 + c.$$

**OBSERVACIÓN 4.** *Es muy importante corroborar que los puntos excepcionales donde  $F$  no es  $\mathcal{C}^1$  sean finitos. En efecto. Consideremos*

$$F(x, y, z) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0\right)$$

que es de clase  $\mathcal{C}^1$  en  $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } z\}$ . Haciendo los cálculos correspondientes, vemos que  $\text{rot}(F) = (0, 0, 0)$  en el dominio de  $F$ . Sin embargo  $F$  no es conservativo ya que si  $C$  es la curva parametrizada por  $\sigma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\sigma(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$  tenemos que

$$\int_C F d\sigma = \int_0^{2\pi} \langle F(\sigma(t), \sigma'(t)) \rangle dt = \int_0^{2\pi} \cos^2(t) + \sin^2(t) dt = 2\pi \neq 0.$$

Además, pensando en cómo demostramos la implicación  $4 \implies 1$  es claro que es imposible construir una superficie  $S$  tal que  $\partial S = C$  y que  $S$  “esquive” los puntos donde  $F$  no es  $\mathcal{C}^1$ .

Una versión para campos en  $\mathbb{R}^2$  del Teorem 3.1 es la siguiente:

**TEOREMA 3.2.** *Sea  $F$  un campo vectorial  $\mathcal{C}^1$  en todo  $\mathbb{R}^2$ . Entonces la siguientes condiciones son equivalentes:*

1. Para cualquier curva cerrada simple y suave a trozos  $C$  se tiene

$$\int_C F d\sigma = 0.$$

2. Para cualquier par de curvas simples, suaves a trozos  $C_1, C_2$ , con los mismos extremos y la misma orientación se tiene

$$\int_{C_1} F d\sigma = \int_{C_2} F d\sigma.$$

3.  $F$  es el gradiente de alguna función  $f$ ,  $F = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ ,

4.  $F = (P, Q)$  tiene rotor cero, es decir  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ .

La demostración es análoga a la del Teorem 3.1 pero usando el Teorema de Green en lugar del Teorema de Stokes en la implicación  $4 \implies 1$ .

OBSERVACIÓN 5.

1. En el Teorema 3.1 no puede haber puntos excepcionales (ni siquiera finitos). Es decir  $F$  tiene que ser  $\mathcal{C}^1$  en todo  $\mathbb{R}^2$ . Por ejemplo,

$$F(x, y) = \left( -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

es de clase  $\mathcal{C}^1$  en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , tiene rotor 0 y si  $C$  es la circunferencia de centro  $(0, 0)$  y radio 1, tenemos que

$$\int_C F d\sigma = 2\pi.$$

2. El Teorema 3.1 es válido si  $F$  está definido en un abierto  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  simplemente conexo. Esto quiere decir que  $C$  es conexo por arcos y que toda curva cerrada contenida en  $U$ , encierra una región que también está contenida en  $U$ . Intuitivamente, esto quiere decir que  $U$  no posee agujeros.



## Teorema de Gauss

El Teorema de la Divergencia, también llamado Teorema de Gauss, relaciona el flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada con la integral de su divergencia en el volumen encerrado por dicha superficie. Es un resultado importante en física, sobre todo en electrostática y en dinámica de fluidos.

El teorema fue descubierto originariamente por Lagrange en 1762, e independientemente por Gauss en 1813, y en 1831 por Ostrogradsky, que también dio la primera demostración del resultado.

### 1. Superficies cerradas y tipo de regiones en $\mathbb{R}^3$

Como dijimos anteriormente, vamos a necesitar integrar sobre *superficies cerradas* en  $\mathbb{R}^3$ . Para formalizar este concepto, recordemos los siguientes tipos de regiones que tenemos en  $\mathbb{R}^3$ .

Regiones de tipo I: Una región  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  se dice de **tipo I** si se describe como

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) : (x, y) \in D, \varphi_1(x, y) < z < \varphi_2(x, y) \right\},$$

donde  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  es una región elemental y  $\varphi_1, \varphi_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

Regiones de tipo II: Una región  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  se dice de **tipo II** si se describe como

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) : (x, z) \in D_2, \phi_1(x, z) < y < \phi_2(x, z) \right\}$$

donde  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  es una región elemental y  $\phi_1, \phi_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

Regiones de tipo III: Una región  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  se dice de **tipo III** si se describe como

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) : (y, z) \in D_2, \theta_1(y, z) < x < \theta_2(y, z) \right\}$$

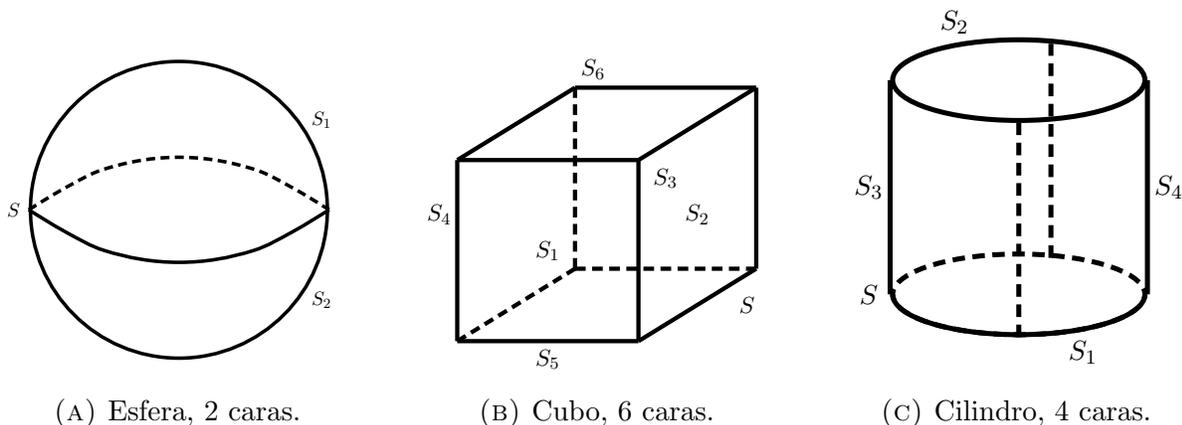
donde  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  es una región elemental y  $\theta_1, \theta_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

Regiones de tipo IV: Una región  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  se dice de **tipo IV** si es de tipo I, II y III.

Como ejemplos de regiones de tipo IV tenemos a la esfera, el cubo y el cilindro.

**DEFINICIÓN 4.1.** Una superficie  $S$  en  $\mathbb{R}^3$  es cerrada si es el borde de una región  $\Omega$  de tipo I, II o III. Es decir, que está formada por un número finito de superficies que pueden

describirse como gráficas de funciones de  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}$ . Vamos a notar  $S = \partial\Omega$  y vamos a llamar *caras* las componentes  $S_1, \dots, S_N$  de  $S$ .



(A) Esfera, 2 caras.

(B) Cubo, 6 caras.

(C) Cilindro, 4 caras.

FIGURA 1. Superficies cerradas.

Las superficies cerradas pueden orientarse de dos maneras: con normal exterior o con normal interior. En este apunte vamos a considerar que las superficies cerradas están orientadas con su normal exterior.

Dado un campo  $F$  definido en  $\mathbb{R}^3$  y una superficie  $S$  cerrada orientada con normal exterior  $\eta$  y con caras  $S_1, \dots, S_N$  definimos

$$\iint_S F = \iint_S F \cdot \eta dS := \sum_{i=1}^N \iint_{S_i} F = \sum_{i=1}^N \iint_{S_i} F \cdot \eta dS.$$

Así, la integral  $\iint_S F \cdot \eta dS$  mide el *flujo total de  $F$*  hacia afuera a través de  $S$ .

## 2. Teorema de Gauss y su demostración

Ahora si podemos enunciar y demostrar el Teorema de Gauss.

**TEOREMA 4.1.** *Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  una región de tipo VI y con  $S = \partial\Omega$  superficie cerrada, regular a trozos, y orientada con normal exterior  $\eta$ .*

*Sea  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^1$ . Entonces:*

$$(4.1) \quad \iint_S \mathbf{F} \cdot \eta dS = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dx dy dz.$$

Alternativamente podemos notar la ecuación (4.1) como

$$\iint_S \mathbf{F} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{F}) dx dy dz.$$

DEMOSTRACIÓN. Como  $F$  es un campo  $\mathcal{C}^1$ , tenemos que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)),$$

donde cada componente  $F_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , cuenta con derivadas parciales de primer orden continuas. Observemos que

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{F}) \, dx dy dz = \iiint_{\Omega} \frac{\partial F_1}{\partial x} \, dx dy dz + \iiint_{\Omega} \frac{\partial F_2}{\partial y} \, dx dy dz + \iiint_{\Omega} \frac{\partial F_3}{\partial z} \, dx dy dz,$$

y por otra parte

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \eta \, dS = \iint_S (F_1, 0, 0) \cdot \eta \, dS + \iint_S (0, F_2, 0) \cdot \eta \, dS + \iint_S (0, 0, F_3) \cdot \eta \, dS.$$

Entonces basta probar que valen las siguientes tres igualdades

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial F_1}{\partial x} \, dx dy dz = \iint_S (F_1, 0, 0) \cdot \eta \, dS,$$

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial F_2}{\partial y} \, dx dy dz = \iint_S (0, F_2, 0) \cdot \eta \, dS$$

y

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial F_3}{\partial z} \, dx dy dz = \iint_S (0, 0, F_3) \cdot \eta \, dS.$$

Nos vamos a ocupar de probar la última, es decir,

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial F_3}{\partial z} \, dx dy dz = \iint_S (0, 0, F_3) \cdot \eta \, dS.$$

Las otras se demuestran análogamente y los detalles quedan como ejercicio.

Como  $\Omega$  es de tipo IV, en particular es de tipo I y por lo tanto se describe como

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) : (x, y) \in D, \varphi_1(x, y) < z < \varphi_2(x, y) \right\},$$

para ciertas funciones  $\varphi_1, \varphi_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$  y  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  dominio elemental. Luego, usando esto se tiene

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{\partial F_3}{\partial z} \, dx dy dz &= \iint_D \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} \frac{\partial F_3}{\partial z}(x, y, z) \, dz \, dx dy \\ (4.2) \quad &= \iint_D \left( F_3(x, y, \varphi_2(x, y)) - F_3(x, y, \varphi_1(x, y)) \right) \, dx dy. \end{aligned}$$

Ahora calculemos la integral sobre el borde de  $\Omega$ ,

$$\iint_S (0, 0, F_3) \cdot \eta \, dS.$$

Para esto, descomponemos  $S = \partial\Omega$  en tres partes, la cara de arriba,  $S_A$ , la cara de abajo  $S_a$  y la unión de las caras laterales que notamos como  $S_L$ . Entonces

$$\iint_S (0, 0, F_3) \cdot \eta \, dS = \iint_{S_A} (0, 0, F_3) \cdot \eta \, dS + \iint_{S_a} (0, 0, F_3) \cdot \eta \, dS + \iint_{S_L} (0, 0, F_3) \cdot \eta \, dS.$$

Sobre  $S_L$  la normal exterior al dominio  $\eta$  tiene la forma  $\eta = (*, *, 0)$  y entonces tenemos

$$\iint_{S_L} (0, 0, F_3) \cdot \eta \, dS = \iint_{S_L} (0, 0, F_3) \cdot (*, *, 0) \, dS = 0.$$

Ahora notemos que la cara de arriba  $S_A$  se parametriza como el gráfico de  $\varphi_2$  sobre el conjunto  $D$ , es decir, con

$$\Gamma(x, y) = (x, y, \varphi_2(x, y)), \quad \Gamma : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Como las derivadas parciales de  $\Gamma$  son

$$\Gamma_x = \left(1, 0, \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x, y)\right) \quad y \quad \Gamma_y = \left(0, 1, \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x, y)\right),$$

la dirección normal que induce  $\Gamma$  es

$$\Gamma_x \times \Gamma_y(x, y) = \left(-\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x, y), \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x, y), 1\right).$$

Observemos que  $\Gamma_x \times \Gamma_y$  tiene la última coordenada positiva +1 y entonces apunta hacia arriba. Por consiguiente respeta la orientación de  $S_A$ .

Entonces

$$\begin{aligned} & \iint_{S_A} (0, 0, F_3) \cdot \eta \, dS \\ (4.3) \quad &= \iint_{D_1} (0, 0, F_3(x, y, \varphi_2(x, y))) \cdot \left(-\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x, y), \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x, y), 1\right) \, dx dy \\ &= \iint_{D_1} F_3(x, y, \varphi_2(x, y)) \, dx dy. \end{aligned}$$

Por último, para calcular la integral de  $F$  sobre la cara se abajo de  $S$ ,  $S_a$ , consideramos la parametrizamos

$$\tilde{\Gamma}(x, y) = (x, y, \varphi_1(x, y)), \quad \tilde{\Gamma} : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3.$$

Al igual que antes, calculamos sus derivadas y el vector normal que induce. Como

$$\tilde{\Gamma}_x = \left(1, 0, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x, y)\right) \quad y \quad \tilde{\Gamma}_y = \left(0, 1, \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x, y)\right),$$

obtenemos

$$\tilde{\Gamma}_x \times \tilde{\Gamma}_y(x, y) = \left(-\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x, y), \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x, y), 1\right).$$

Observemos que  $\tilde{\Gamma}_x \times \tilde{\Gamma}_y$  tiene la última coordenada positiva +1 así que apunta hacia arriba y por consiguiente invierte la orientación de  $S_a$ .

Entonces al calcular la integral sobre  $S_a$  con esta parametrización, debemos cambiar el signo, es decir

$$\begin{aligned}
 & \iint_{S_a} (0, 0, F_3) \cdot \eta \, dS \\
 (4.4) \quad &= - \iint_{D_1} (0, 0, F_3(x, y, \varphi_1(x, y))) \cdot \left( -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x, y), \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x, y), 1 \right) \, dx dy \\
 &= - \iint_{D_1} F_3(x, y, \varphi_1(x, y)) \, dx dy
 \end{aligned}$$

De (4.2) y (4.3)–(4.4) obtenemos

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} \frac{\partial F_3}{\partial z} \, dx dy dz &= \iint_{D_1} \left( F_3(x, y, \varphi_2(x, y)) - F_3(x, y, \varphi_1(x, y)) \right) \, dx dy \\
 &= \iint_S (0, 0, F_3) \cdot \eta \, dS,
 \end{aligned}$$

lo que termina la demostración.  $\square$

Observemos que, al igual que vimos en el Teorema de Green, el Teorema de Gauss se puede usar en cualquier dominio que se escriba como una unión finita de dominios de tipo IV, pero teniendo especial cuidado con el vector normal sobre el borde que siempre debe apuntar para afuera. Por ejemplo, se puede usar Gauss en el dominio

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) : 1 < \|(x, y, z)\| < 2 \right\}.$$

Ejercicio: pensar como descomponer  $\Omega$  como unión de dominios de tipo IV y como debe ser el vector normal a su borde. La idea es similar a la que usamos cuando vimos que el Teorema de Green valía para regiones que se escriben como uniones de regiones de tipo III (ver Figura 5 del Capítulo 1).

**EJEMPLO 4.1.** Consideremos el campo  $F(x, y, z) = (2x, y^2, z^2)$  y  $S$  la esfera unitaria

$$S = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$$

orientada con normal exterior. Si queremos calcular  $\iint_S F \cdot \eta \, dS$ , podemos usar el Teorema de Gauss. Para esto, llamemos  $\Omega$  al volumen que encierra  $S$ , es decir  $\Omega = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < 1 \right\}$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 \iint_S F \cdot \eta \, dS &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(F) \, dx dy dz \\
 &= \iiint_{\Omega} \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \, dx dy dz \\
 &= \iiint_{\Omega} 2 + 2y + 2z \, dx dy dz = 2 \operatorname{Vol}(\Omega) = \frac{8\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 4.2. Supongamos que queremos calcular

$$\iint_S x^2 + y + z \, dS$$

con  $S$  como en el ejemplo anterior  $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ . Para eso busquemos un campo vectorial  $F$  tal que

$$F(x, y, z) \cdot \eta(x, y, z) = x^2 + y + z.$$

donde  $\eta(x, y, z)$  es la normal exterior a  $S$  en el punto  $(x, y, z)$ . Como  $\eta(x, y, z) = (x, y, z)$ , podemos tomar

$$F(x, y, z) = (x, 1, 1).$$

Usando el Teorema de Gauss nos queda

$$\begin{aligned} \iint_S x^2 + y + z \, dS &= \iint_S \langle F, \eta \rangle \\ &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(F) = \iiint_{\Omega} \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \\ &= \iiint_{\Omega} 1 = \operatorname{Vol}(\Omega) = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

## Aplicaciones

### 1. Interpretación física del rotor

Veamos una interpretación del rotor de un campo vectorial  $\mathbf{F}$ . Fijemos un vector  $\eta$  y un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^3$ . Consideremos la superficie que denotamos por  $D_\delta(x_0)$  dada por un disco centrado en  $x_0$  de radio  $\delta$  en el plano ortogonal a  $\eta$  que pasa por  $x_0$ . A esta superficie la pensamos orientada según el vector normal  $\eta$ . Gracias al Teorema de Stokes tenemos

$$\iint_{D_\delta(x_0)} \text{rot}(\mathbf{F}) = \iint_{D_\delta(x_0)} \langle \nabla \times \mathbf{F}, \eta \rangle dS = \int_{\partial D_\delta(x_0)^+} \mathbf{F} d\sigma$$

Además, si llamamos  $\tau$  a un campo tangente al borde del disco que preserve la orientación de  $\partial D_\delta(x_0)^+$  tenemos que

$$\int_{\partial D_\delta(x_0)^+} \mathbf{F} d\sigma = \int_{\partial D_\delta(x_0)} \langle \mathbf{F}, \tau \rangle d\sigma.$$

Ahora bien, dividiendo por  $A(D_\delta(x_0))$  que denota el área del disco  $D_\delta(x_0)$ , obtenemos

$$\frac{1}{A(D_\delta(x_0))} \iint_{D_\delta(x_0)} \text{rot}(\mathbf{F}) = \frac{1}{A(D_\delta(x_0))} \int_{\partial D_\delta(x_0)^+} \langle \mathbf{F}, \tau \rangle d\sigma.$$

Por el Teorema de los valores intermedios para integrales, sabemos existe un  $q \in D_\delta(x_0)$  tal que

$$\langle \nabla \times \mathbf{F}(q), \eta(q) \rangle = \frac{1}{A(D_\delta(x_0))} \iint_{D_\delta(x_0)} \text{rot}(\mathbf{F})$$

donde  $\eta(q)$  es el vector normal a que pasa por  $q$ . Si usamos la continuidad del campo  $\mathbf{F}$  y del campo normal  $\eta$  y tomamos límite cuando  $\delta \rightarrow 0$  obtenemos que

$$\langle \nabla \times \mathbf{F}(x_0), \eta \rangle = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{A(D_\delta(x_0))} \iint_{D_\delta(x_0)} \text{rot}(\mathbf{F}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{A(D_\delta(x_0))} \int_{\partial D_\delta(x_0)^+} \langle \mathbf{F}, \tau \rangle d\sigma.$$

La ultima integral

$$\frac{1}{A(D_\delta(x_0))} \int_{\partial D_\delta(x_0)^+} \langle \mathbf{F}, \tau \rangle d\sigma$$

nos da la circulación de  $\mathbf{F}$  por unidad de area y nos da el trabajo que ejerce  $\mathbf{F}$  sobre la trayectoria circular contenida en el plano perpendicular a  $\eta$ .

## 2. Interpretación física de la divergencia

Veamos ahora una interpretación de la divergencia de un campo vectorial  $\mathbf{F}$ . Fijemos un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^3$  y consideremos ahora el dominio dado por una bola centrada en  $x_0$  de radio  $\delta$  que denotamos por  $B_\delta(x_0)$ . Gracias al Teorema de Gauss tenemos

$$\iiint_{B_\delta(x_0)} \operatorname{div}(\mathbf{F}) = \iint_{\partial B_\delta(x_0)} \langle \mathbf{F}, \eta \rangle d\sigma,$$

donde  $\eta$  es la normal exterior a la superficie  $\partial B_\delta(x_0)$ .

Ahora bien, dividiendo por el volumen de  $B_\delta(x_0)$  se obtiene

$$\frac{1}{\operatorname{Vol}(B_\delta(x_0))} \iiint_{B_\delta(x_0)} \operatorname{div}(\mathbf{F}) = \frac{1}{\operatorname{Vol}(B_\delta(x_0))} \iint_{\partial B_\delta(x_0)} \langle \mathbf{F}, \eta \rangle d\sigma$$

Con un argumento similar al que aplicamos en la sección anterior, tomamos límite cuando  $\delta \rightarrow 0$  y obtenemos

$$\operatorname{div}(\mathbf{F})(x_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{Vol}(B_\delta(x_0))} \iiint_{B_\delta(x_0)} \operatorname{div}(\mathbf{F}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{Vol}(B_\delta(x_0))} \iint_{\partial B_\delta(x_0)} \langle \mathbf{F}, \eta \rangle d\sigma.$$

La última integral

$$\frac{1}{\operatorname{Vol}(B_\delta(x_0))} \iint_{\partial B_\delta(x_0)} \langle \mathbf{F}, \eta \rangle d\sigma$$

nos da el flujo de  $\mathbf{F}$  a través de la superficie (con su normal exterior) por unidad de volumen.

## 3. Leyes de conservación. Ecuación del calor

Supongamos ahora que tenemos una función  $u : \mathbb{R}^3 \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  que depende de la posición espacial  $x \in \mathbb{R}^3$  y del tiempo  $t \in (0, T)$ . Fijemos un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^3$ , un tiempo  $t_0$  y consideremos ahora el dominio dado por la bola  $B_\delta(x_0)$  centrada en  $x_0$  de radio  $\delta$ . La diferencia,

$$\iiint_{B_\delta(x_0)} u(x, t_0 + h) dx - \iiint_{B_\delta(x_0)} u(x, t_0) dx$$

nos dice cuanto de  $u$  hay dentro de la bola  $B_\delta(x_0)$  a tiempo  $t_0 + h$  menos cuanto había a tiempo  $t_0$ .

Podemos escribir

$$\begin{aligned} & \iiint_{B_\delta(x_0)} u(x, t_0 + h) dx - \iiint_{B_\delta(x_0)} u(x, t_0) dx \\ (5.1) \quad &= \int_{t_0}^{t_0+h} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{B_\delta(x_0)} u(x, s) dx ds \\ &= \int_{t_0}^{t_0+h} \iiint_{B_\delta(x_0)} \frac{\partial u}{\partial t}(x, s) dx ds. \end{aligned}$$

Por otro lado, suponemos que nada de  $u$  se crea ni se destruye, entonces lo que hay de  $u$  dentro de la bola  $B_\delta(x_0)$  a tiempo  $t_0 + h$  menos lo había a tiempo  $t_0$  es lo que entró (o salió) a través de la frontera de la bola entre los tiempos  $t_0$  y  $t_0 + h$ . Ahora incorporamos otra magnitud física. Si llamamos  $\mathbf{F}(x, t)$  al campo vectorial,  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , que nos da el flujo de  $u$  a través de una superficie  $S$ , entonces

$$\iint_S \langle \mathbf{F}(x, s), \eta \rangle dS$$

nos dice cuanto de  $u$  atraviesa la superficie  $S$  (en el sentido dado por su orientación).

Volviendo a nuestra cuenta anterior, tenemos, usando el Teorema de Gauss (observar que nos interesa lo que esta dentro de la bola, así que orientamos su borde con la normal interior y entonces nos aparece un signo  $-$ ),

$$\begin{aligned} (5.2) \quad & \iiint_{B_\delta(x_0)} u(x, t_0 + h) dx - \iiint_{B_\delta(x_0)} u(x, t_0) dx \\ &= - \int_{t_0}^{t_0+h} \iint_{\partial B_\delta(x_0)} \langle \mathbf{F}(x, s), n \rangle dS ds \\ &= - \int_{t_0}^{t_0+h} \iiint_{B_\delta(x_0)} \operatorname{div}(\mathbf{F})(x, s) dx ds. \end{aligned}$$

De (5.1) y (5.2) obtenemos

$$\int_{t_0}^{t_0+h} \iiint_{B_\delta(x_0)} \frac{\partial u}{\partial t}(x, s) dx ds = \int_{t_0}^{t_0+h} \iiint_{B_\delta(x_0)} -\operatorname{div}(\mathbf{F})(x, s) dx ds.$$

Dividiendo por  $h$  y tomando limite cuando  $h \rightarrow 0$  nos queda

$$\begin{aligned} \iiint_{B_\delta(x_0)} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t_0) dx &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} \iiint_{B_\delta(x_0)} \frac{\partial u}{\partial t}(x, s) dx ds \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} \iiint_{B_\delta(x_0)} -\operatorname{div}(\mathbf{F})(x, s) dx ds = \iiint_{B_\delta(x_0)} -\operatorname{div}(\mathbf{F})(x, t_0) dx. \end{aligned}$$

Y ahora dividiendo por  $\operatorname{Vol}(B_\delta(x_0))$  y tomado limite cuando  $\delta \rightarrow 0$  se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{Vol}(B_\delta(x_0))} \iiint_{B_\delta(x_0)} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t_0) dx \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{Vol}(B_\delta(x_0))} \iiint_{B_\delta(x_0)} -\operatorname{div}(\mathbf{F})(x, t_0) dx = -\operatorname{div}(\mathbf{F})(x_0, t_0). \end{aligned}$$

Y, como  $x_0$  y  $t_0$  son cualesquiera, concluimos la ecuación diferencial

$$(5.3) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = -\operatorname{div}(\mathbf{F})(x, t).$$

La ecuación (5.3) se trata de una ecuación diferencial ya que relaciona derivadas parciales de  $u$  con derivadas parciales de  $\mathbf{F}$ .

**3.1. Ecuación de transporte.** A la ecuación (5.3) se le suele agregar una Ley constitutiva que relaciona  $u$  con  $\mathbf{F}$ .

Para empezar a ver como funciona (5.3) pensemos en una sustancia que se mueve dentro de un fluido. En este ejemplo tomemos  $u(x, t)$  como la densidad de la sustancia y supongamos que  $\mathbf{F}(x, t) = u(x, t)V(x, t)$  donde  $V(x, t)$  es el campo de velocidades del fluido (y así el flujo  $\mathbf{F}$  tiene en cuenta la velocidad del fluido y la densidad de sustancia en cada punto). En este caso (5.3) nos queda

$$(5.4) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = -\operatorname{div}(u(x, t)V(x, t)) = -\langle \nabla u(x, t), V(x, t) \rangle - u(x, t)\operatorname{div}(V(x, t)).$$

Si además suponemos que el fluido se mueve con velocidad  $V$  independiente de  $t$  y tal que  $\operatorname{div}(V(x)) = 0$ , obtenemos

$$(5.5) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = -\langle \nabla u(x, t), V(x) \rangle.$$

Esta ecuación (5.5) se conoce como *ecuación de transporte* y nos dice que la sustancia (con densidad  $u(x, t)$ ) se transporta siguiendo las curvas de flujo de  $V$ . Es decir, si tenemos una curva  $\sigma(t)$  tal que

$$\sigma'(t) = V(\sigma(t))$$

(es decir, la velocidad de la partícula es la velocidad del fluido), entonces la densidad es constante sobre esta trayectoria,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}u(\sigma(t), t) &= \langle \nabla u(\sigma(t), t), \sigma'(t) \rangle + \frac{\partial u}{\partial t}(\sigma(t), t) \\ &= \langle \nabla u(\sigma(t), t), V(\sigma(t)) \rangle - \langle \nabla u(\sigma(t), t), V(\sigma(t)) \rangle = 0, \end{aligned}$$

lo que reafirma la idea de que la sustancia se transporta siguiendo el movimiento del fluido.

**3.2. Ley de Fourier. Ecuación del calor.** Cuando  $u(x, t)$  modela la temperatura en un medio homogéneo, Fourier propuso la siguiente Ley de Fourier

$$(5.6) \quad \mathbf{F}(x, t) = -k\nabla u(x, t),$$

es decir, el flujo de calor es proporcional al gradiente de la temperatura. La constante  $k$  es positiva y se trata de una propiedad del medio conocida como la conductividad térmica. Observemos que (5.6) es muy razonable pues dice que el flujo de calor se produce de zonas más calientes (donde la temperatura  $u$  es mayor) a zonas más frías (donde la temperatura es menor).

Asumiendo (5.6), de (5.3) se obtiene

$$(5.7) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = -\operatorname{div}(\mathbf{F})(x, t) = k\operatorname{div}(\nabla u)(x, t).$$

Ahora calculemos

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\nabla u) &= \operatorname{div} \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.\end{aligned}$$

Al operador que nos quedo,

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

se lo conoce como el Laplaciano de  $u$  (en honor a Laplace) y se lo denota  $\Delta u$  o a veces  $\nabla^2 u$ .

Volviendo a (5.7) nos queda

$$(5.8) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = k\Delta u(x, t).$$

Se trata de una ecuación diferencial en derivadas parciales (ya que relaciona distintas derivadas parciales de  $u$ ). Esta ecuación es una de las más famosas y se usa para modelar diversos fenómenos de difusión (no solamente la difusión del calor en un medio homogéneo).

Si el medio no es homogéneo la conductividad térmica  $k$  depende de  $x$  y, usando la Ley de Fourier, nos queda la ecuación

$$(5.9) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = -\operatorname{div}(\mathbf{F})(x, t) = \operatorname{div}(k(x)\nabla u)(x, t).$$

**3.3. Medios porosos /  $p$ -Laplaciano.** Observemos que las ecuaciones anteriores (5.5), (5.8), (5.9) son lineales en  $u$ .

También se pueden hallar ecuaciones no-lineales si la ley constitutiva que relaciona  $\mathbf{F}$  con  $u$  es no-lineal.

Por ejemplo, podemos considerar para  $m > 1$

$$\mathbf{F}(x, t) = -mu^{m-1}(x, t)\nabla u(x, t),$$

y nos queda la *ecuación de los medios porosos*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = -\operatorname{div}(\mathbf{F})(x, t) = \operatorname{div}(mu^{m-1}\nabla u)(x, t) = \Delta(u^m(x, t)),$$

que modela la densidad de un gas que se difunde en un medio poroso.

Si ahora ponemos

$$\mathbf{F}(x, t) = -|\nabla u(x, t)|^{p-2}\nabla u(x, t),$$

donde  $p > 1$ , nos queda el  $p$ -Laplaciano

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = -\operatorname{div}(\mathbf{F})(x, t) = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)(x, t).$$

#### 4. Identidades de Green

Para finalizar este capítulo presentaremos una idea de como "integrar por partes" en un dominio en  $\mathbb{R}^3$ .

Primero recordemos que en una variable, gracias a la integración por partes, tenemos

$$(5.10) \quad \int_a^b v'(x)u'(x)dx + \int_a^b v(x)u''(x)dx = \int_a^b (v(x)u'(x))'dx = [vu'(b) - vu'(a)],$$

es decir,

$$(5.11) \quad \int_a^b v(x)u''(x)dx = [vu'(b) - vu'(a)] - \int_a^b v'(x)u'(x)dx.$$

Ahora pensemos en  $\mathbb{R}^3$  y supongamos que tenemos dos funciones  $u, v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Si calculamos la divergencia del campo  $v\nabla u$  tenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(v\nabla u) &= \operatorname{div} \left( v \frac{\partial u}{\partial x}, v \frac{\partial u}{\partial y}, v \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ &= v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} \\ &= v\Delta u + \langle \nabla v, \nabla u \rangle. \end{aligned}$$

Dado un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , usemos el Teorema de Gauss para obtener

$$\iiint_{\Omega} v\Delta u + \langle \nabla v, \nabla u \rangle dx = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(v\nabla u) dx = \iint_{\partial\Omega} v \langle \nabla u, \eta \rangle dS,$$

es decir, obtuvimos la *Primera Identidad de Green*,

$$(5.12) \quad \iiint_{\Omega} v\Delta u dx = \iint_{\partial\Omega} v \langle \nabla u, \eta \rangle dS - \iiint_{\Omega} \langle \nabla v, \nabla u \rangle dx.$$

Notar la similitud con (5.11).

Si ahora le restamos a (5.12) la primera identidad de Green pero con los papeles de  $u$  y  $v$  cambiados, esto es

$$\iiint_{\Omega} u\Delta v dx = \iint_{\partial\Omega} u \langle \nabla v, \eta \rangle dS - \iiint_{\Omega} \langle \nabla v, \nabla u \rangle dx,$$

se obtiene la *Segunda Identidad de Green*

$$\iiint_{\Omega} v\Delta u dx - \iiint_{\Omega} u\Delta v dx = \iint_{\partial\Omega} v \langle \nabla u, \eta \rangle dS - \iint_{\partial\Omega} u \langle \nabla v, \eta \rangle dS.$$

Comparar con

$$\int_a^b v(x)u''(x)dx - \int_a^b u(x)v''(x)dx = [vu'(b) - vu'(a)] - [uv'(b) - uv'(a)].$$

## Bibliografía

- [1] G. Acosta, N. Wolanski, *Curvas y Superficies en Análisis II y Matemática 3*, 2020.
- [2] T. Apostol, "Calculus", Vol. I, Ed. Revert, 1960.
- [3] T. Apostol, "Calculus", Vol. II, Ed. Revert, 1960.
- [4] J. Marsden, A. Tromba, "Vector Calculus". Freeman and Company, New York 1988.