Análisis 1 - Alimentos - 1° cuatrimestre 2021 (virtual)

PRÁCTICA 2

SUBESPACIOS, AUTOVALORES, DIAGONALIZACIÓN

Subespacios, generadores y bases

1. *a*) Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos del plano son puntos, rectas o todo $\mathbb{R}^2$.

$$\mathbb{S}_1 = \{(0,0)\} \qquad \mathbb{S}_2 = \{(1,1)\} \qquad \mathbb{S}_3 = \{(1,1);(2,2)\}$$

$$\mathbb{S}_4 = \{(1,0);(0,2)\} \qquad \mathbb{S}_5 = \{(1,1);(-1,-1)\}$$

   b) Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos del espacio son puntos, rectas, planos o todo $\mathbb{R}^3$.

$$\mathbb{S}_1 = \{(0,0,0)\} \quad \mathbb{S}_2 = \{(1,1,1)\} \quad \mathbb{S}_3 = \{(1,1,1);(2,2,2)\} \quad \mathbb{S}_4 = \{(1,0,1);(0,2,0)\}$$

$$\mathbb{S}_5 = \{(1,0,1);(0,2,0);(3,5,3)\} \qquad \mathbb{S}_6 = \{(1,0,1);(0,2,0);(a,b,a)\}$$

$$\mathbb{S}_7 = \{(1,0,1);(0,2,0);(3,0,1)\}$$

2. En cada caso, determinar si el vector V pertenece al subespacio $\mathbb{S}$ y, en caso afirmativo, escribir a V como combinación lineal de los generadores dados.

   a) $V = (1,2)$ $\qquad \mathbb{S} = \{(2,3);(3,4)\}$

   b) $V = (-1, 1/2, 2)$ $\qquad \mathbb{S} = \{(2,-1,-4)\}$

   c) $V = (1,2,3)$ $\qquad \mathbb{S} = \{(-1,1,3);(2,1,0)\}$

   d) $V = (1,2,3)$ $\qquad \mathbb{S} = \{(1,1,1);(2,1,1);(1,-1,-1)\}$

   e) $V = (-1,2,2)$ $\qquad \mathbb{S} = \{(1,2,3);(-3,-2,-4);(0,4,5)\}$

   f) $V = (x,y,z)$ $\qquad \mathbb{S} = \{(1,1,1);(1,1,0);(1,0,0)\}$

3. Decidir si el conjunto de vectores es linealmente dependiente o independiente. En caso de que sea linealmente dependiente, escribir alguno de los vectores como combinación lineal de los otros.

   a) $\{(1,-1);(-1,2)\}$ $\qquad$ *b*) $\{(1,-1);(-1,2);(3,4)\}$

   c) $\{(1,-1);(0,0);(-1,2)\}$ $\qquad$ *d*) $\{(1,-1);(-2,2)\}$

   e) $\{(3,2,-1)\}$ $\qquad$ *f*) $\{(1,-2,-1);(-2,1,0);(-2,4,2)\}$

   g) $\{(1,-2,-1);(-2,4,2)\}$ $\qquad$ *h*) $\{(1,-2,-1);(-2,1,0);(0,3,1)\}$

   i) $\{(1,1,-2);(4,0,-7);(-1,3,1)\}$ $\qquad$ *j*) $\{(1,1,1);(0,1,1);(0,0,1)\}$

4. Hallar una base y la dimensión del subespacio $\mathbb{S}$.

   a) $\mathbb{S} = \{(1,-1);(-1,2)\}$

   b) $\mathbb{S} = \{(1,-1,2);(0,0,1);(-2,2,0)\}$

   c) $\mathbb{S} = \{(1,-2,-1);(-2,1,0);(0,3,1)\}$

   d) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 - 2x_2 = 0\}$

e) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 + x_3 = 0; x_2 - x_3 = 0; 2x_1 + 2x_2 = 0\}$

f) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 - 3x_3 = 0; x_2 + x_3 - 2x_4 = 0\}$

5. Hallar una base y la dimensión de $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$.

   a) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 - 2x_2 = 0\}$ y $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon x_2 + x_3 = 0\}$.

   b) $\mathbb{S} = \{(1, -1, 3); (2, 1, -1)\}$ y $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

   c) $\mathbb{S} = \{(1, 2, -1); (2, 3, 2)\}$ y $\mathbb{T} = \{(0, 1, 1); (1, 0, 2)\}$.

   d) $\mathbb{S} = \{(1, 0, -1); (0, 1, 1)\}$ y $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon x_2 + x_3 = 0; x_1 - 2x_2 = 0\}$.

   e) $\mathbb{S} = \{(2, 1, 1, -3); (1, 0, 1, -1)\}$ y $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 + x_4 = 0\}$.

6. Determinar los valores de k para los cuales $\{(0, 1, -2); (1, -1, k); (2, -3, 0)\}$ es linealmente dependiente.

7. En cada caso, decidir si el conjunto de vectores dado es una base del subespacio $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$.

   a) $\{(1, 1, 0)\}$

   b) $\{(2, 0, -1); (-6, 0, 3)\}$

   c) $\{(1, 1, 0); (1, -1, -1)\}$

   d) $\{(2, 0, -1); (1, -1, 1)\}$

8. Dados los subespacios $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$ y $\mathbb{T} = \{(1, 2, 1); (2, -1, -2)\}$, encontrar una base de $\mathbb{R}^3$ que contenga una base de $\mathbb{S}$ y una base de $\mathbb{T}$. En otras palabras, hallar una base $B = \{V_1, V_2, V_3\}$ de todo $\mathbb{R}^3$ de manera tal que $\{V_1, V_2\}$ sea base de $\mathbb{T}$ y que $\{V_2, V_3\}$ sea base de $\mathbb{S}$.

9. *a)* Encontrar tres sistemas de generadores del subespacio

   $$\mathbb{S} = \{(1, -1, 2, 1), (3, 1, 0, -1), (1, 1, -1, -1)\} \subset \mathbb{R}^4 .$$

   b) ¿$(2, 1, 3, 5)$ está en $\mathbb{S}$?

   c) ¿Es cierto que $\mathbb{S} \subset \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$?

   d) ¿Es cierto que $\{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subset \mathbb{S}$?

10. Decidir si los siguientes conjuntos son linealmente independientes o no. En caso de no serlo, determine qué elementos pueden eliminarse de manera que el conjunto residual sea linealmente independiente y genere el mismo subespacio que el conjunto original. Finalmente, complete cada conjunto a una base del espacio ambiente.

    a) $\{(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5)\}$ en $\mathbb{R}^3$.

    b) $\{(1, 0, -1), (1, 1, 2), (0, 1, 1)\}$ en $\mathbb{R}^3$.

    c) $\{(1, 1, 2), (1, 4, 3), (3, 3, 3), (e, \pi, \sqrt{2})\}$ en $\mathbb{R}^3$.

    d) $\{(1, 1, 1), (1, \alpha, \alpha^2), (1, \beta, \beta^2)\}$ en $\mathbb{R}^3$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

    e) $\{(1, 1, 1, 1), (1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3), (1, \beta, \beta^2, \beta^3)\}$ en $\mathbb{R}^4$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

11. Determinar todos los $\lambda \in \mathbb{R}$ de manera que los siguientes conjuntos resulten linealmente independientes:

    a) $\{(1, 2, \lambda), (1, 1, 1), (0, 1, 1 - \lambda)\}$ en $\mathbb{R}^3$.

b) $\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & \lambda \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & 2\lambda \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\}$ en $M_2(\mathbb{R})$.

12. Dado $V = (1,1)$, normalizarlo y hallar W de norma 1 para que $B = \{V', W\}$ sea base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ (V' es V normalizado).

13. Dado $V_1 = (1,2,1)$, normalizarlo y hallar V_2, V_3 para que $B = \{V_1', V_2, V_3\}$ sea una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ (V_1' es V_1 normalizado).

Transformaciones lineales y matrices ortogonales

14. Sean A, B matrices de $n \times n$. Probar que si para todo par de vectores v, w de $\mathbb{R}^n$ se tiene $\langle Av, w\rangle = \langle Bv, w\rangle$, entonces $A = B$.

15. Hallar una base del núcleo y otra del rango (columna) de A, para

    a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ *b)* $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$

    c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ *d)* $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

    Comprobar en cada caso $\dim(\mathrm{Ran}(A)) + \dim(Nu(A)) = n$, donde n es la dimensión donde actúa A. Â¿Es cierto que si tomamos una base de $\mathrm{Ran}(A)$ y le agregamos una base de $Nu(A)$ obtenemos una base de $\mathbb{R}^n$?

16. Una matriz $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es *ortogonal* si $\langle Uv, Uw\rangle = \langle v, w\rangle$ para todo $v, w \in \mathbb{R}^n$. Probar que son equivalentes:

    a) U es ortogonal.

    b) U es una isometría, o sea $\|Uv\| = \|v\|$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$.

    c) U es inversible y su inversa se calcula como su traspuesta, es decir $U^{-1} = U^t$.

17. Probar que toda matriz ortogonal verifica $\det(U) = \pm 1$. Â¿Es cierta la recíproca? (dar una prueba o un contraejemplo).

18. Probar que $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ es una matriz ortogonal de $\mathbb{R}^2$

    a) Mostrar que U es una simetría con respecto al eje x.

    b) Â¿Qué determinante tiene U? Â¿Preserva la orientación de $\mathbb{R}^2$?

    c) Dar una matriz U que represente una simetría respecto del eje y.

19. Sea $B = \{(-1/2, \sqrt{3}/2); (\sqrt{3}/2, 1/2)\}$ base de $\mathbb{R}^2$, sea U la matriz que tiene estos vectores como columna (en el orden dado).

    a) Comprobar que es una base ortonormal y luego dibujar ambos vectores en el plano.

    b) Comprobar que U es una matriz ortogonal y que invierte la orientación.

20. Escribir la matriz de rotación $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ de ángulo $\theta = \pi/3$, alrededor del eje x (en el espacio $\mathbb{R}^3$).

Autovalores y autovectores, diagonalización

21. Calcular el polinomio característico, los autovalores y autoespacios de cada matriz:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

22. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$. Mostrar que A y A^t tienen los mismos autovalores. Mostrar con un ejemplo que no sucede lo mismo con los autovectores.

23. Sea $A \in M_2(\mathbb{R})$ tal que $\det(A) = 3$ y $Tr(A) = -4$, hallar los autovalores de A.

24. Calcular el polinomio característico, los autovalores y autovectores de la matriz A de cada item (en todos los casos, $a \in \mathbb{R}$):

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$;

d) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

e) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

f) $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$;

g) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$.

25. *a)* Sean $A, C, D \in M_n(\mathbb{R})$ con C inversible tales que $A = CDC^{-1}$. Mostrar que $A^k = CD^kC^{-1}$, cualquiera sea $k \in \mathbb{N}$.

    b) Calcular
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}^n$$
    para cada $n \in \mathbb{N}$.

26. *a)* Hallar C, D como en el ejercicio anterior para cada una de las matrices A del Ejercicio 24.

    b) Mostrar que en cada caso, puede cambiarse C por una matriz ortogonal U de manera tal que $A = UDU^t$.

    c) Decidir en cada caso si A es (semi)-definida positiva, negativa o indefinida.