

ÁLGEBRA III

Práctica 4 – Segundo Cuatrimestre de 2023

Teorema de Galois

Ejercicio 1. Halle elementos primitivos de E/\mathbb{Q} , donde E es el cuerpo de descomposición del polinomio:

a) $X^3 - 2$.

c) $X^4 - 2$.

b) $(X^2 - 2)(X^2 - 3)$.

d) $(X^4 + 1)(X^2 + 5)$.

Calcule, además, los correspondientes grupos de Galois.

Ejercicio 2. Sea $E = \mathbb{Q}[\sqrt{2 + \sqrt{2}}]$. Pruebe que E/\mathbb{Q} es normal, calcule su grupo de Galois $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ y determine todas sus subextensiones.

Ejercicio 3. Decida si la extensión $\mathbb{F}_p(X, Y)/\mathbb{F}_p(X^p, Y^p)$ admite un elemento primitivo y calcule el grado de la extensión.

Ejercicio 4. Sea $K = \mathbb{F}_p$.

i) Pruebe que $\text{Gal}(K(X)/K) \simeq PGL(2, K)$.

ii) Calcule el cardinal de $G := \text{Gal}(K(X)/K)$.

iii) Pruebe que $K(X)^G = K(Y)$, donde $Y = \frac{(X^{p^2} - X)^{p+1}}{(X^p - X)^{p^2+1}}$.

iv) Pruebe que el cuerpo fijo por los mapas afines (respectivamente, traslaciones) está dado por $K(Y)$, donde $Y = (X^p - X)^{p-1}$ (respectivamente, $Y = X^p - X$).

Ejercicio 5. Sea $E = \mathbb{C}(X)$ y sean $f, g \in \text{Gal}(E/\mathbb{C})$ dados por $f(X) = X^{-1}$ y $g(X) = \xi_n X$, donde $\xi_n \in \mathbb{C}$ es una raíz n -ésima primitiva de la unidad. Pruebe que:

i) $f^2 = g^n = \text{id}_E$ y $fg = g^{-1}f$.

ii) El subgrupo H generado por f y g es isomorfo a D_n .

iii) $E^H = \mathbb{C}(X^n + X^{-n})$.

Ejercicio 6. Determine todas las subextensiones del cuerpo de descomposición del polinomio $(X^2 - 2)(X^2 - 3)(X^2 - 5)$ sobre \mathbb{Q} .

Ejercicio 7. Determine todas las subextensiones cuadráticas del cuerpo de descomposición de $X^4 - 2X^2 - 1$ sobre \mathbb{Q} .

Ejercicio 8. Sea $\Phi_n = m(\xi_n, \mathbb{Q})$ el n -ésimo polinomio ciclotómico. Sea K/\mathbb{Q} una extensión tal que Φ_n es irreducible en $K[X]$. Pruebe que $K[\xi_n]/K$ es normal de grado $\varphi(n)$ y que $\text{Gal}(K[\xi_n]/K) \simeq \mathcal{U}_n$.

Ejercicio 9. Sean a y b algebraicos sobre K tales que $a^2, b^2 \in K$ y $a, b, ab \notin K$. Caracterice $\text{Gal}(K[a, b]/K)$.

Ejercicio 10. Sea E/K una extensión Galois tal que $\text{Gal}(E/K) \cong \bigoplus_{k=1}^n \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Pruebe que existen $a_1, \dots, a_n \in E$ tales que $E = K[a_1, \dots, a_n]$ y $a_k^2 \in K$ para todo $1 \leq k \leq n$.

Ejercicio 11. Consideremos la extensión $E = \mathbb{Q}[\xi_{11}]/\mathbb{Q}$.

- i) Pruebe que $\mathbb{Q}[\cos(\frac{2\pi}{11})]$ es la única subextensión de grado 5.
- ii) Pruebe que hay una única subextensión de grado 2 y determínela.

Sugerencia: recuerde lo visto en clase sobre extensiones ciclotómicas.

Ejercicio 12. Sea E/K una extensión Galois de grado 15. Pruebe que E/K tiene solo dos subextensiones propias. Calcule sus grados y pruebe que dichas subextensiones son normales.

Ejercicio 13. Sea E/K una extensión Galois de grado 45. Pruebe que si F/K es una subextensión de grado 3 de E/K , entonces es normal.

Ejercicio 14. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo y sea E/K una extensión Galois de grado $p^n s$ con $n, s \in \mathbb{N}$ y $p \nmid s$. Pruebe que:

- i) E/K tiene subextensiones de grado s y todas ellas son isomorfas.
- ii) Si $p > s$, entonces hay una única subextensión de grado s , que además resulta ser normal.

Ejercicio 15. Sea L/K una extensión y sean E/K y F/K dos subextensiones algebraicas. Pruebe que EF/K es abeliana si y solo si E/K y F/K son abelianas.

Ejercicio 16. Sea E/K una extensión algebraica. Pruebe que existe una subextensión L/K abeliana maximal (es decir, que contiene a todas las subextensiones abelianas). ¿Cual es en el caso en que E es el cuerpo de descomposición de $X^4 + 2$ sobre \mathbb{Q} ?

Ejercicio 17. Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ irreducible de grado mayor o igual a 2, con una única raíz real. Sea E el cuerpo de descomposición de f sobre \mathbb{Q} . Pruebe que $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ no es abeliano.

Ejercicio 18. Sea K/\mathbb{Q} una extensión de Galois de grado 4 tal que $\sqrt{-3} \in K$. Caracterice la clase de isomorfismo de $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$.

Ejercicio 19. Sea $\alpha = \sqrt{6 + 3\sqrt{3}} + \sqrt{6 - 3\sqrt{3}}$. Halle $m(\alpha, \mathbb{Q})$ y deduzca $\text{Gal}(\mathbb{Q}[\sqrt{6 + 3\sqrt{3}}]/\mathbb{Q})$.

Ejercicio 20. Halle $\text{Gal}(\text{Desc}(f|K))$ para

1. $f = X^4 - 5X^2 + 3$, $K = \mathbb{F}_3, \mathbb{Q}_3$ y \mathbb{Q} .
2. $f = X^4 - 7X^2 + 2$, $K = \mathbb{F}_5, \mathbb{Q}_5$ y \mathbb{Q} .
3. $f = X^4 - uX^2 + 1 - u$, $K = \mathbb{C}((u))$ y $\mathbb{C}(u)$.
4. $f = X^4 + (1-u)X^2 + u$, $K = \mathbb{C}((u))$ y $\mathbb{C}(u)$.

Ejercicio 21. Se define el *discriminante* de $f(X) = a_n \prod_{i=1}^n (X - z_i)$ como

$$\Delta(f) := a_n^{2n-2} \prod_{i < j} (z_i - z_j)^2.$$

1. Pruebe que si $f \in \mathbb{K}[X]$ entonces $\Delta(f) \in K$.
2. Pruebe que si $f \in \mathbb{R}[X]$ tiene todas sus raíces reales, entonces $\Delta(f) \geq 0$.
3. Si f es mónico, pruebe que $\Delta(f) = (-1)^{\binom{n}{2}} \prod_{i=1}^n f'(z_i)$.
4. Pruebe que si $f = X^3 + pX + q$ entonces $\Delta(f) = -4p^3 - 27q^2$.
- * 5. Pruebe que si $f = X^4 + cX^2 + dX + e$ entonces

$$\Delta(f) = -4c^3d^2 + 16c^4e - 27d^4 + 144cd^2e - 128c^2e^2 + 256e^3.$$

6. Pruebe que si $f = X^n + aX + b$ entonces

$$\Delta(f) = (-1)^{\binom{n}{2}} (n^n b^{n-1} + (1-n)^{n-1} a^n).$$

7. Pruebe que el discriminante es invariante por las transformaciones

$$a) f(X) \mapsto X^{\text{gr}(f)} f(X^{-1}). \quad b) f(X) \mapsto f(X + b) \text{ con } b \in \mathbb{K}.$$

8. Dado $a \in \mathbb{K}^\times$, pruebe que $\Delta(f(aX)) = a^{n(n-1)} \Delta(f(X))$.

- * 9. Calcule $\Delta(f)$ para

$$f(X) = \frac{(n-1)^{n-1} X^n - n^n (X-1)^{n-1}}{(X-n)^2}.$$

Sugerencia: considere $X = nY/(nY - (n-1))$.

Ejercicio 22. Para cada caso, calcule el grupo de Galois del cuerpo de descomposición de f sobre \mathbb{Q} , y determine todas las subextensiones intermedias.

- | | | |
|--------------------|---------------------------|---------------------------|
| a) $f = x^4 + 7$. | c) $f = x^6 + 3$. | e) $f = x^3 - 18x + 36$. |
| b) $f = x^6 - 3$. | d) $f = x^4 + 4x^2 + 2$. | f) $f = x^6 + 5x^3 + 7$. |

Ejercicio 23. Sea $E = \mathbb{Q} \left(\sqrt{(2 + \sqrt{2})(3 + \sqrt{3})} \right)$.

1. Pruebe que E/\mathbb{Q} es normal y calcule su grupo de Galois.
2. Decida si $\sqrt{6 + \sqrt{6}} \in E$.

Ejercicio 24. Sea $f = X^3 + pX + q \in \mathbb{F}_\ell[X]$ irreducible, con ℓ potencia de un número primo. Pruebe que $-4p^3 - 27q^2 \in \mathbb{F}_\ell$ es un cuadrado perfecto.

Ejercicio 25. Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ irreducible de grado 3. ¿Es posible que $i \in \text{Desc}(f|\mathbb{Q})$?

Ejercicio 26. Sea $f \in K[X]$ mónico irreducible tal que $f(0) \notin K^p$ con $p > 2$ primo. Pruebe que $f(X^p)$ es irreducible en $K[X]$. ¿Es esto cierto si $p = 2$?

* **Ejercicio 27.** Sea E el máximo cuerpo dentro de $\overline{\mathbb{Q}}$ que no contiene a $\sqrt{2}$. Pruebe que toda extensión finita de E es de Galois, con grupo de Galois cíclico.