Nombre y Apellido:

1	2	3	4	5

Primer Parcial - Topología 2023

1. La botella de Klein K se define como el cociente de $[0, 2\pi] \times [0, 1]$ con la topología usual por la relación de equivalencia generada por

$$(t, 0) \sim (2\pi - t, 1) \text{ para todo } t \text{ en } [0, 2\pi] \text{ y } (0, x) \sim (2\pi, x) \text{ para todo } x \text{ en } [0, 1].$$

Demostrar que la botella de Klein es un espacio Hausdorff, compacto y normal y que la función $i : K \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$i([(t, x)]) = ((2 + \cos t) \cdot \cos 2\pi x, (2 + \cos t) \cdot \sin 2\pi x, \sin t \cdot \cos \pi x, \sin t \cdot \sin \pi x)$$

está bien definida, es continua y subespacio.

2. Sea $f : X' \to X$ una función continua entre espacios topológicos. Demostrar que si se tiene que todo punto en el espacio X tiene un entorno U tal que...

   a) ... la función $f_U : f^{-1}(U) \to U$ es cerrada entonces f es cerrada.

   b) ... la función $f_U : f^{-1}(U) \to U$ es propia entonces f es propia.

3. Probar que en un espacio normal X, para todo cubrimiento por abiertos $X = U_1 \cup U_2$ existe otro $X = V_1 \cup V_2$ tal que

$$\overline{V_1} \subseteq U_1 \text{ y } \overline{V_2} \subseteq U_2.$$

4. Dada una función continua $f : X \to X$ con X un espacio Hausdorff, compacto y conexo, se define el subespacio

$$X_\infty = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n = f(x_{n+1}) \text{ para todo } n \text{ en } \mathbb{N}\} \subseteq X^{\mathbb{N}}.$$

Probar que

   a) X_∞ es Hausdorff y compacto,

   b) si la funcion es sobreyectiva entonces X_∞ es conexo.

Sugerencia: Para ver que es conexo primero demostrar que todo subconjunto abierto se puede escribir en la forma $\bigcup_n p_n^{-1}(U_n)$ con $p_n : X_\infty \to X$ las coordenadas y U_n abiertos de X.

5. Dados espacios topológicos X e Y probar que la función inducida por componer con las proyecciones a cada coordenada

$$\mathcal{C}(S^1, X \times Y) \to \mathcal{C}(S^1, X) \times \mathcal{C}(S^1, Y)$$

es biyectiva y que si los tres espacios de funciones tienen la topología compacto-abierta entonces es un homeomorfismo.