PRÁCTICA 9: HOMOLOGÍA

1. Hallar los posibles grupos abelianos M_1, M_2 y M_3 para que exista una sucesión exacta de grupos abelianos de la forma
$$0 \to \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \to M_1 \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to M_2 \to \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \to M_3 \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to 0.$$

2. Probar que una sucesión exacta corta de complejos de cadenas
$$0 \to A_* \to B_* \to C_* \to 0$$
induce una sucesión exacta larga de homología
$$\cdots \to H_{n+1}(C_*) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A_*) \to H_n(B_*) \to H_n(C_*) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A_*) \to \cdots.$$

3. Probar que si (X, A, B) es una terna con $B \subseteq A \subseteq X$, entonces existe una sucesión exacta larga
$$\cdots \to H_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A, B) \to H_n(X, B) \to H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A, B) \to \cdots.$$

4. Sea $f : X \to Y$ continua. Probar que si es una sección, una retracción o se factoriza por un espacio contráctil entonces la función inducida $f_* : H_*(X) \to H_*(Y)$ resulta un morfismo de grupos abelianos que es inyectivo, sobreyectivo o nulo respectivamente.

5. Probar que $H_1(\mathbb{R}, \mathbb{Q})$ es un grupo abeliano libre y calcular una base.

6. Sea X un espacio topológico, probar que si A es un subespacio cerrado que es un retracto por deformación fuerte de un entorno abierto entonces se tienen isomorfismos
$$H_n(X, A) = H_n(X/A, A/A) = H_n(X/A) \text{ para todo } n \geq 1.$$

7. Dados espacios X e Y con puntos x e y que sean retractos por deformación fuerte de un entorno abierto respectivamente probar que $H_n(X \vee Y) = H_n(X) \oplus H_n(Y)$ para todo $n \geq 1$.

8. Calcular la homología de una esfera, del plano proyectivo, la banda de Möbius, un cilindro, el toro, la botella de Klein y la de una superfice orientable compacta con dos manijas.

9. Calcular la homología de los siguientes espacios
   a) los puntos con al menos una coordenada entera en $\mathbb{R}^2$,
   b) el pegado de $S^1 \times S^1$ con la banda de Möbius M identificando $1 \times S^1$ con ∂M,
   c) el toro sólido $S^1 \times D^2$,
   d) el complemento de tres puntos en $\mathbb{R}^4$,
   e) el producto $S^2 \times S^3$,
   f) el espacio que se obtiene de S^6 identificando dos de sus puntos.

10. Calcular la homología de los espacios proyectivos complejos usando que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ se puede definir como el pushout de $S^{2n-1} \to \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ con $S^{2n-1} \to D^{2n}$.

11. Supongamos que un espacio admite un cubrimiento por n abiertos contráctiles de forma que toda intersección no vacia entre ellos tambien es contráctil. Probar que sus grupos de homología son finitamente generados y se anulan en grados mayores o iguales a $n-1$.

12. Probar que el espacio $\{a, b, c, d\}$ con abiertos $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}\}$ se puede cubrir por dos abiertos contráctiles y usar esto para calcular su homología.