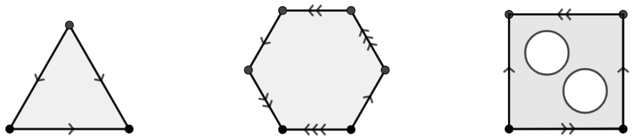
PRÁCTICA 8: VAN KAMPEN Y CLASIFICACIÓN DE REVESTIMIENTOS

1. Sea $X = U \cup V$ un cubrimiento por abiertos con X, U, V y $U \cap V$ arcoconexos, demostrar que se tiene que
   a) si V es simplemente conexo, $\pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ es un epimorfismo.
   b) si V y $U \cap V$ son simplemente conexos, $\pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ es un isomorfismo.
2. Calcular el grupo fundamental de los siguientes espacios:
   a) la unión de las circunferencias de centros $(1,0), (2,0), \ldots, (n,0)$ y radios $1, 2, \ldots, n$,
   b) la unión de las circunferencias de centros $(1,0), (3,0), \ldots, (2n-1)$ y de radio 1.
3. Calcular los grupos fundamentales de los espacios que se obtienen de las siguientes figuras cocientando por la relación de equivalencia que identifica los lados como se indica:



4. Construir un espacio arco-conexo con grupo fundamental el grupo cíclico de n elementos.
5. Calcular el grupo fundamental de los siguientes espacios:
   a) el complemento de un punto, una circunferencia o una recta en $\mathbb{R}^3$
   b) la unión de dos esferas tangentes en $\mathbb{R}^3$,
   c) la unión de S^1 con $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$,
   d) el complento de un punto en el plano proyectivo o en una banda de Möbius,
   e) la unión de $S^1 \times S^1$ con un disco D^2 identificando $S^1 \times \{1\}$ con el borde del disco.
6. Probar que si un subespacio de $\mathbb{R}^n$ es la unión de subconjuntos convexos de forma que cualesquiera tres tienen un punto en común entonces el subespacio es simplemente conexo.
7. Probar que si un espacio arco-conexo tiene una base numerable de abiertos simplemente conexos entonces su grupo fundamental es a lo sumo numerable.
8. Consideremos el toro $S^1 \times S^1$ e identifiquemos su grupo fundamental con $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de la forma usual, luego
   a) describir los revestimientos asociados a el subgrupo generado por $(1,0)$,
   b) describir los revestimientos asociados a el subgrupo generado por $(1,1)$,
   c) describir los revestimientos asociados a el subgrupo generado por $(2,0)$ y $(0,2)$,
   d) todo revestimiento conexo es homeomorfo a $S^1 \times S^1, S^1 \times \mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^2$.
9. Clasificar los revestimientos de orden 2 de la botella de Klein, de $S^1 \vee S^1$ y de $S^1 \vee \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.
10. Probar que un espacio con revestimiento universal es semilocalmente simplemente conexo.

11. Sea G un grupo topológico arcoconexo y localmente conexo con neutro e. Probar que para todo revestimiento $p : \tilde{G} \to G$ y todo levantado $\tilde{e}$ de e existe una unica estructura de grupo topológico en $\tilde{G}$ con elemento neutro $\tilde{e}$ y que hace de p un morfismo de grupo.

12. Probar que todo grupo topológico arcoconexo y localmente simplemente conexo es el cociente de un grupo topológico simplemente conexo por un subgrupo discreto.

    Describir este grupo para $SO_3(\mathbb{R})$.

13. Sean X, Y, Z espacios arcoconexos y localmente arcoconexos y sean $q : X \to Y$, $r : Y \to Z$ funciones continuas. Sea $p = rq$.

    a) Probar que si p y r son revestimientos, también lo es q.

    b) Probar que si p y q son revestimientos, también lo es r.

    c) Probar que si q y r son revestimientos y el espacio Z admite un revestimiento universal, entonces p también es un revestimiento.

14. Sea $p : E \to B$ un revestimiento entre espacios arcoconexos y localmente arcoconexos. Una *transformación deck* es un homeomorfismo $h : E \to E$ tal que $ph = p$.

    a) Sean $e_0, e_1 \in p^{-1}(b_0)$. Probar que existe una transformación deck h tal que $h(e_0) = e_1$ si y sólo si $p_*(\pi_1(E, e_0)) = p_*(\pi_1(E, e_1))$. Probar que si h existe, entonces es única.

    b) el revestimiento se dice regular si $p_*(\pi_1(E, e_0))$ es normal en $\pi_1(B, b_0)$, probar que en ese caso el cociente coincide con el grupo de transformaciones deck,

    c) si E es simplemente conexo, probar que $\pi_1(B, b_0)$ es el grupo de transformaciones deck.

15. Describir el grupo de transformaciones deck del revestimiento usual $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$.