PRÁCTICA 5: ESPACIOS DE FUNCIONES

1. Dado un espacio topológico X y un espacio métrico (Y, d), la topología de la convergencia compacta en Y^X se define como la que tiene una base de abiertos dada por los conjuntos

$$B(f, K, \epsilon) = \{g \mid d(f(x), g(x)) < \epsilon \text{ para todo } x \in K\}$$

con $f : X \to Y$ continua, K un subespacio compacto de X y $\epsilon > 0$.

   a) Probar que una red converge si y sólo si converge uniformemente sobre cada compacto.
   b) Probar que es mas fina que la puntual y que coinciden si X es discreto.
   c) Probar que es mas gruesa que la uniforme y que coinciden si X es compacto.

2. Probar que en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ el conjunto de las funciones acotadas no es cerrado con la topología de la convergencia compacta pero sí lo es con la topología de la convergencia uniforme.

3. En cada caso demostrar que la sucesión no converge en la topología uniforme pero sí lo hace en la de la convergencia compacta

   a) la sucesión $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ con $f_n(x) = 1/nx$,
   b) la sucesión $f_n : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ con $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^k$.

4. Dado un espacio topológico X y un espacio métrico (Y, d), probar que en $\mathcal{C}(X, Y)$ la topología de la convergencia compacta coincide con la topología compacto-abierta.

5. Dados espacios topológicos X e Y, probar que si $\mathcal{C}(X, Y)$ se considera con la topología compacto-abierta entonces se tiene que

   a) si la clausura de U esta en V entonces la clausura de $W(K, U)$ esta en $W(K, V)$,
   b) si Y es Hausdorff o regular entonces $\mathcal{C}(X, Y)$ es Hausdorff o regular respectivamente.

6. Sean X, Y y Z espacios topológicos, probar que si consideramos las topologiás compacto-abierta en los espacios funcionales entonces se tiene que

   a) dada $f : X \to Y$, la precomposición $f^* : \mathcal{C}(Y, Z) \to \mathcal{C}(X, Z)$ es continua,
   b) si Y es Hausdorff y loc. compacto, luego $\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \to \mathcal{C}(X, Z)$ es continua.

7. Sea X un espacio topológico Hausdorff, demostrar que en $X^{[0,1]}$ con la topología compacto abierta, las funciones $f : [0, 1] \to X$ tales que $f(0) = f(1)$ son un subconjunto cerrado.

8. Dado un espacio topológico X, probar hay una correspondencia biyectiva entre funciones continuas $X \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineales en la segunda variable y funciónes continuas $X \to M_n(\mathbb{R})$.

9. Sea X un espacio Hausdorff y localmente compacto, probar que si $p : E \to B$ es una función cociente entonces $p \times Id_X : E \times X \to B \times X$ tambien es una función cociente.