# Práctica 4: Axiomas de Separacion y Compacidad

1. Sea $Y$ un espacio de Hausdorff, probar que
   a) si $f : X \to Y$ es continua entonces $\{(x_1, x_2) : f(x_1) = f(x_2)\}$ es cerrado en $X \times X$,
   b) si $f : X \to Y$ es continua entonces su gráfico $\{(x, y) : y = f(x)\}$ es cerrado en $X \times Y$,
   c) si $f, g : X \to Y$ son continuas entonces $\{x : f(x) = g(x)\}$ es cerrado en $X$,
   d) si $f : X \to Y$ es continua y tiene inversa a izquierda entonces es subespacio y cerrada.
2. Probar que la propiedad de ser Hausdorff
   a) se preserva por productos, subespacios y pullbacks,
   b) se preserva por uniones disjuntas pero no necesariamente por cocientes ni pushouts
3. Sea $f : X \to Y$ cociente con $X$ un espacio de Hausdorff, probar que
   a) si $f$ es propia o admite una sección entonces $Y$ es Hausdorff,
   b) si $f$ es abierta y la relación de equivalencia es cerrada en $X \times X$, entonces $Y$ es Hausdorff.
4. Un espacio topológico se dice una variedad topólogica de dimensión $n$ si es Hausdorff, admite una base numerable y todo punto tiene un entorno abierto homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. En cada caso, decidir si el espacio topológico es una variedad topológica de alguna dimensión,
   a) el toro $S^1 \times S^1$,
   b) el plano proyectivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$,
   c) el pushout de la inclusion abierta $\mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ con si misma,
   d) el cociente de $\mathbb{R}$ por la accion de $\mathbb{Z}^2$ dada por $(m, n) \cdot x = x + m + n\sqrt{2}$.
5. Probar que la propiedad de ser compacto
   a) se preserva por productos, subespacios cerrados y pullbacks sobre bases Hausdorff,
   b) se preserva por uniones disjuntas finitas, imagenes y pushouts.
6. Decidir si $[0, 1]$ es compacto para la topología subespacio de la recta de Sorgenfrey $\mathbb{R}_l$.
7. Probar que compactos disjuntos en un espacio de Hausdorff se pueden separar por abiertos disjuntos y en particular deducir que Hausdorff y compacto es normal.
8. Sea $f : X \to Y$ con $Y$ compacto, probar que $f$ es continua si su gráfico es cerrado.
9. Sea $f : X \to Y$ continua y cerrada con fibras compactas, entonces $X$ es compacto si $Y$ lo es.
10. Sea $f : X \to Y$ continua con $X$ compacto y $Y$ Hausdorff. Probar que $f$ es propia.
11. Probar que los vértices de un grafo se pueden pintar con $k$ colores de forma tal que vértices vecinos tengan distinto color si y sólo si lo mismo se puede hacer con todo subgrafo finito.
12. Probar que ser localmente compacto se preserva por imagenes de funciones continuas abiertas.
13. Probar que un producto de espacios topológicos es localmente compacto si y sólo si todos los factores son localmente compactos y todos salvo finitos son compactos.

14. Probar que el subespacio $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{R} \times \prod \mathbb{Q}_p$ de tiras $t \times \prod t_p$ con $t_p$ en $\mathbb{Z}_p$ para todo $p$ salvo finitos es un espacio topológico que es localmente compacto y Hausdorff.
15. Probar que $[0,1]^{\mathbb{N}}$ con la topologiá por cajas y $\mathbb{Q}$ con la usual no son localmente compactos.
16. Probar que la compactificación a un punto de $\mathbb{N}$ es homeomorfa a $\{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ con la topología subespacio de $\mathbb{R}$ y la compactificación a un punto de $\mathbb{R}^n$ es homeomorfa a $S^n$.
17. Probar que toda función propia entre espacios Hausdorff y localmente compactos se extiende a una función propia entre sus compactificaciones a un punto.
18. Probar que el espacio topológico $S_\Omega$ tiene la propiedad de que toda función continua a $\mathbb{R}$ es eventualmente constante y se extiende a su compactificación a un punto.
19. Probar que un orden total estricto con la topología del orden es regular.
20. Sea $X$ completamente regular. Probar que si $A$ es compacto y $B$ es cerrado entonces existe una función $f : X \to [0,1]$ que es continua y tal que $f(A) = 0$ y $f(B) = 1$.
21. Probar que un espacio localmente compacto y Hausdorff es completamente regular.
22. Probar que el plano de Sorgenfrey $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$ es completamente regular pero no es normal.
23. Probar que un espacio normal y conexo tiene un solo punto o es no numerable.
24. Sea $X$ un espacio normal que tiene una base numerable y denotemos por $J$ el conjunto de pares de abiertos basicos en donde uno está contenido en el otro. Probar que el espacio es metrizable demostrando los siguientes puntos
    *a*) para cada par $(U_j, V_j)$ en $J$ existe $f_j : X \to [0,1]$ continua con $f_j(U_j) = 0$ y $f_j(V_j^c) = 1$,
    *b*) las $f_j$ forman una familia de funciones continuas que separan puntos de cerrados,
    *c*) el producto de todas las $f_j$ es una función $f : X \to [0,1]^J$ que es subespacio.
25. Sea $X$ completamente regular. Probar que $X$ es conexo si y sólo si $\beta(X)$ es conexo.
26. Sea $X$ un espacio Hausdorff y localmente compacto tal que toda función continua a $\mathbb{R}$ se extiende de forma continua a su compactificación a un punto. Probar que en este caso su compactificación de Stone-Čech coincide con la compactificación a un punto.
27. Dados conjuntos $A$ y $B$, probar que sus clausuras en $\beta(A \cup B)$ son disjuntas.
28. Un espacio topológico $X$ se dice extremandamente disconexo si la clausura de todo abierto es abierta. Probar las siguientes afirmaciones
    *a*) los espacios discretos, indiscretos y los irreducibles son extremadamente disconexos,
    *b*) la compactificación de Stone-Čech de un espacio discreto es extremadamente disconexa
    *c*) un espacio Hausdorff y extremadamente disconexo es totalmente disconexo,
29. Un grupo topológico $G$ es un espacio topológico con estructura de grupo de forma que la multiplicación y el tomar inverso sean continuas. Probar las siguientes afirmaciones
    *a*) para todo $g$ en $G$, las funciones $g' \mapsto g \cdot g'$ y $g' \mapsto g' \cdot g$ son homeomorfismos,
    *b*) la clausura de todo subgrupo es un subgrupo.
    *c*) para todo entorno $U$ del neutro existe otro entorno $V$ tal que $V \cdot V$ y $V^{-1}$ estan en $U$.
    *d*) si es $T_0$ entonces es Hausdorff.
30. Probar que $\mathbb{R}, \mathbb{Q}_p, S^1, GL_n(\mathbb{R}), SL_n(\mathbb{R}), O_n(\mathbb{R}), SO_n(\mathbb{R})$ son grupos topológicos localmente compactos y decidir cuáles son compactos y cúales son conexos.