PRÁCTICA 3: CONEXIÓN

1. Probar que ser conexo se preserva por productos finitos y por imagenes de funciones continuas.
2. Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de subespacios conexos de un espacio topológico tal que para cualesquiera dos existe una cadena finita de ellos que empieza en el primero, termina en el segundo y cada uno intersecta al siguiente. Probar que la unión de los A_α es conexo.
3. Sea $p : X \to Y$ cociente con fibras conexas. Probar que si Y es conexo entonces X es conexo.
4. Sea X un espacio topológico. Probar que el espacio X es disconexo si y sólo si existe un subconjunto propio y no vacío tal que su frontera es vacia.
5. Probar que el plano de Sorgenfrey $\mathbb{R}_l$ es totalmente disconexo pero no es discreto.
6. Probar que si A es un subconjunto numerable de $\mathbb{R}^2$ entonces $\mathbb{R}^2 - A$ es conexo.
7. Probar que un orden total estricto es conexo si y sólo si entre cualesquiera dos elementos hay otro y cualquier subconjunto acotado tiene un supremo.
8. De los siguientes conjuntos, equipados con la topología del orden del diccionario, calcular sus componentes conexas y sus componentes arco-conexas

   $$\mathbb{N} \times [0,1), \quad [0,1) \times \mathbb{N}, \quad [0,1] \times [0,1) \ \text{ y } \ [0,1] \times [0,1].$$

9. *El seno del topológo.* Demostrar que la curva $T = \{(t, \sin(1/t)) : 0 < t \leq 1\}$ en $\mathbb{R}^2$ es un ejemplo de un subconjunto que es arco-conexo pero su clausura no lo es.
10. *El ventilador de Knaster-Kuratowski.* Para cada c en el conjunto de Cantor en $[0,1]$, sea F_c el subconjunto de puntos del segmento que une $(c,0)$ con $(1/2,1/2)$ cuya segunda coordenada es racional o irracional dependiendo si c es o no es uno de los extremos de los intervalos removidos en la construcción clásica del conjunto de Cantor via intervalos encajados.

    Probar que la union de los F_c es un ejemplo de un espacio topológico conexo y totalmente arco-disconexo pero que si quitamos el punto $(1/2,1/2)$ se vuelve totalmente disconexo
11. Probar que ser localmente conexo se preserva por productos finitos y por cocientes.
12. Probar que en un espacio localmente arco-conexo, los abiertos son localmente arco-conexos y que son conexos si y sólo si son arco-conexos.
13. *La escoba infinita.* Sea E_n la unión de todos los segmentos que unen el punto $(1/n, 0)$ con cada uno de los puntos de la forma $(1/n+1, 1/m)$ con $m \geq 1$ y definamos

    $$E = [0,1] \times \{0\} \cup E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n \cup \cdots .$$

    Probar que E es un espacio arco-conexo y que el punto $(0,0)$ tiene una base de entornos conexos pero no una de entornos abiertos conexos.
14. Probar que el último espacio del ejercicio 8 es localmente conexo pero no es localmente arco-conexo y que la clausura de T en el ejercicio 10 no es localmente conexa.
15. Probar que un espacio metrico completo, conexo y localmente conexo es arco-conexo.