PRÁCTICA 2: FUNCIONES CONTINUAS, TOPOLOGÍAS INICIALES Y FINALES

1. Sea X un espacio topológico. Para cada conjunto E definimos $\chi_E : X \to \{0,1\}$ como la función que vale 0 o 1 dependiendo si el punto no está o está en el subconjunto dado.

   a) Si la topología en $\{0,1\}$ es la discreta entonces la función χ_E es continua si y sólo si el subconjunto E tiene frontera vacia.

   b) Si la topología en $\{0,1\}$ es la de Sierpinski, cuyos abiertos son $\varnothing, \{1\}$ y $\{0,1\}$, entonces la función χ_E es continua si y sólo si el subconjunto E es abierto.

2. Sea X un espacio topológico y $\{F_\alpha\}$ un cubrimiento localmente finito por cerrados, probar que una función $f : X \to Y$ es continua si y sólo si su restricción a todo F_α es continua.

3. Si $f, g : X \to Y$ son funciones continuas con Y un orden total estricto con su topologia del orden entonces

   a) probar que el conjunto $\{x \in X : \ f(x) \leq g(x)\}$ es cerrado en X,

   b) probar que la función $h(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\}$ es continua.

4. Sean X y Y ordenes totales estrictos con su topología del orden y $f : X \to Y$ una función inyectiva que preserve el orden

   a) dar un ejemplo de tal función que no sea continua,

   b) probar que si la imagen de función es convexa entonces la función es continua y la topologia del orden de X coincide con la de subespacio de Y.

5. Sea $\mathbb{R}_l$ el conjunto $\mathbb{R}$ con la topologia con base los intervalos $[a, b)$ donde $a < b$. Para cada recta en el plano describir su topología como subespacio de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}$ y de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$ respectivamente.

6. Sean $\mathbb{R}_d$ y $[0,1]_d$ los conjuntos $\mathbb{R}$ y $[0,1]$ con la topologías discretas. En cada caso comparar las topologias que se mencionan,

   a) la producto y la del orden del diccionario en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y la producto de $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$,

   b) la producto y la del orden del diccionario en $[0,1] \times [0,1]$ y la producto en $[0,1]_d \times [0,1]$.

7. Sea X un espacio topológico. Probar que si $A \subseteq B \subseteq X$ entonces la topología de A como subespacio de X coincide con su topología como subespacio de B como subespacio de X.

8. Sean X y Y espacios topológicos, A un subespacio de X y B un subespacio de Y, se tiene entonces que

   a) la topología producto en $A \times B$ coincide con la de subespacio de $X \times Y$,

   b) la clausura de $A \times B$ coincide con $\overline{A} \times \overline{B}$.

9. Una función $f : X \times Y \to Z$ se dice continua en la primer variable si $f(-, y) : X \to Z$ es una función continua para todo punto y en Y. Analogamente, se define que sea continua en la segunda variable. Probar que si f es continua entonces es continua en cada variable.

10. Sea (X, d) un espacio métrico, probar que entre todas las topologías en X que hacen de la función distancia $d : X \times X \to \mathbb{R}$ continua, la más gruesa es la inducida por la métrica.

11. Sean X y Y espacios topológicos, probar que $p_1 : X \times Y \to X$ y $p_2 : X \times Y \to Y$ son funciones abiertas y dar un ejemplo en donde no son cerradas.

12. Sea $\{f_i : X_i \to Y_i\}_{i \in I}$ una familia de funciones entre espacios topológicos y $f : \prod X_i \to \prod Y_i$ la función producto entre los espacios topológicos producto.

    a) Probar que si las f_i son continuas entonces f es continua.

    b) Probar que si las f_i son iniciales entonces f es inicial.

    c) Probar que si las f_i son subespacios entonces f es subespacio.

    d) Probar que si las f_i son subespacios y cerradas entonces f es subespacio y cerrada.

13. Probar que en un producto arbitrario de espacios topologicos, la clausura de un producto de subespacios es el producto de las clausuras. ¿Y si se usa la topología por cajas?

14. Decidir si las funciones $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\omega$ dadas por las formulas

$$f(t) = (t, 2t, 3t, \ldots), \quad g(t) = (t, t, t, \ldots) \text{ y } h(t) = (t, \frac{1}{2}t, \frac{1}{3}t, \ldots)$$

    son continuas tomando la topología producto y caja en $\mathbb{R}^\omega$ respectivamente.

15. Sea X un espacio topológico. Probar que la familia $\{\chi_U : X \to \{0, 1\}\}$ a valores en el espacio de Sierpinski y con U recorriendo todos los abiertos del espacio es una familia inicial.

16. Probar que la familia $\{f_i : X \to X_i\}_{i \in I}$ es inicial si y sólo si $f : X \to \prod X_i$ es inicial.

17. Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios topológicos, probar que

    a) si f es inyectiva y final entonces es inicial,

    b) si f es sobreyectiva y inicial entonces es abierta y cerrada,

    c) si f es sobreyectiva y abierta, cerrada o admite una sección continua entonces es cociente.

18. Una función $f : X \to Y$ es un homeo local si para todo x en X, existe un entorno abierto en el que su restricción es un homeomorfismo con un entorno abierto de $f(x)$ en Y.

    Probar que si un homeo local es sobreyectivo entonces es cociente.

19. En cada caso, dar una base para la topologia final en el codominio y decidir si el cociente en cuestión es una función abierta y si es una función cerrada:

    a) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = (x, 0)$ si $x \neq 0$ y $f(0, y) = (0, y)$,

    b) $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x$,

    c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x + y^2$,

    d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por $f(x, y) = x^2 + y^2$,

    e) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\sim$ que identifica los números enteros.

20. Consideremos en $[0, 1] \times [0, 1]$ la relación de equivalencia

$$(0, y) \sim (1, 1 - y) \text{ para todo } y \in [0, 1].$$

    El espacio cociente se llama la banda de Möbius. Probar que la correspondiente función cociente es cerrada pero no es abierta ni tiene secciones continuas.

21. Sea G un grupo. Un **G-espacio** es un espacio topológico X junto con una acción $G \times X \to X$ que sea continua en la segunda variable. En este caso, definimos la relación de equivalencia

$$x \sim y \text{ si sólo si existe } g \in G \text{ tal que } y = g \cdot x$$

y denotamos por X/G el espacio topológico cociente. Probar que $p : X \to X/G$ es una función abierta y que si el grupo G es finito entonces también es cerrada.

22. Probar que en cada caso los espacios topológicos correspondientes son G-espacios e identificar el cociente

    a) $\mathbb{Z}$ actua en $\mathbb{R}$ por $n \cdot x = n + x$ y el cociente es S^1.

    b) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ actua en $\mathbb{R}^2$ por $(n, m) \cdot (x, y) = (n + x, m + y)$ con cociente $S^1 \times S^1$.

    c) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ actua en S^n por $\pm 1 \cdot x = \pm x$ con cociente el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

    d) $\mathbb{Z}$ actua en $\mathbb{R} \times [-1, 1]$ por $m \cdot (x, y) = (m + x, (-1)^m y)$ con cociente la banda de Möbius.

23. Sea $f : X \to Y$ continua y denotemos por $f' : X' \to Y'$ su cambio de base a lo largo de una funcion continua $g : Y' \to Y$. Probar que se tiene que

    a) si f es inicial entonces f' es inicial,

    b) si f es subespacio entonces f' es subespacio,

    c) si f es homeomorfismo local entonces f' es homeomorfismo local.

24. Sean $f : A \to B$ y $g : A \to C$ continuas, un pushout es un espacio topológico P junto con el dato de dos funciones continuas $b : B \to P$ y $c : C \to P$ tales que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "b"] \\ C \arrow[r, "c"'] & P \end{tikzcd}$$

y la terna (P, b, c) es universal en el sentido de que para toda otra terna (P', b', c') existe una unica funcion continua $p : P \to P'$ tal que $b' = p \circ b$ y $c' = p \circ c$.

    a) El pushout de f y g existe y es unico salvo homeomorfismo.

    b) El pushout de $\varnothing \to B$ y $\varnothing \to C$ se identifica con el coproducto de $B \coprod C$.

    c) El pushout de un subespacio $A \to B$ con $A \to \{*\}$ se identifica con el cociente B/A.

    d) Si los subconjuntos A y B de un espacio topológico son ambos abiertos o ambos cerrados entonces el pushout de las inclusiones $A \cap B \to A$ y $A \cap B \to B$ es la union $A \cup B$.

25. Sea X un espacio topológico, dada una función continua $f : S^1 \to X$, definimos el pegado de un disco a X a lo largo de f como el pushout de f con la inclusion cerrada $S^1 \to D^2$.

    a) Dar $f : S^1 \to D^2$ para que el pegado correspondiente sea la esfera S^2.

    b) Dar $f : S^1 \to S^1$ para que el pegado correspondiente sea el plano proyectivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

    c) Dar $f : S^1 \to X$ para que el pegado correspondiente sea el toro $S^1 \times S^1$.