PRÁCTICA 1: EJEMPLOS DE TOPOLOGÍAS

1. Sea X un conjunto.

   a) Demostrar que $\tau = \{U \in \mathcal{P}(X) : X \setminus U \text{ es finito } \} \cup \{\varnothing\}$ determina una topología sobre el conjunto X, la llamamos la **topología cofinita**. Describa el interior, la clausura y la frontera de un subconjunto arbitrario con respecto a esta topología.

   b) Sea κ un cardinal y sea

   $$\tau_\kappa = \{U \in \mathcal{P}(X) : X \setminus U \text{ tiene cardinal a lo sumo } \kappa\} \cup \{\varnothing\}$$

   Dar condiciones necesarias y suficientes sobre κ para que τ_κ sea una topología sobre X.

2. Sea X un conjunto no vacío y sea $x_0 \in X$. Pruebe que:

   a) $\{U \in \mathcal{P}(X) : x_0 \in U\} \cup \{\varnothing\}$ es una topología sobre X.

   b) $\{U \in \mathcal{P}(X) : x_0 \notin U\} \cup \{X\}$ es una topología sobre X.

   Describa el interior, la clausura y la frontera de los subconjuntos de X con respecto a cada una de estas topologías.

3. Sea (X, τ) un espacio topológico y Y un subconjunto de X. Muestre que

   $$\tau_Y = \{U \cap Y : U \in \tau\}$$

   es una topología sobre Y. Se llama la *topología inducida* por τ o la *topología subespacio.*

4. Sea X un conjunto infinito. Dado x_0 en X sea τ la familia de subconjuntos que tienen complemento finito o no contienen a x_0. Pruebe que τ es una topología y describa sus cerrados.

5. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de todos los cerrados acotados de $\mathbb{R}$ en su topología usual, junto con $\mathbb{R}$. Pruebe que existe una topología en $\mathbb{R}$ para la cual $\mathcal{F}$ es el conjunto de todos los cerrados.

6. Digamos que un subconjunto U de $\mathbb{R}^2$ es **radialmente abierto** si su intersección con toda recta que pasa por uno de sus puntos es un abierto de ésta. Muestre que el conjunto de todos los conjuntos radialmente abiertos de $\mathbb{R}^2$ es una topología sobre $\mathbb{R}^2$ y compárela con la usual

Clausura, interior, frontera

7. Sea X un espacio topológico y sean A, $B \subseteq X$. Pruebe que:

   a) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;

   b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

   c) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$;

   d) $A \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$ cuando A es abierto; y

   e) $\overline{A} \setminus \overline{B} \subseteq \overline{A \setminus B}$.

   f) $\bigcup_\alpha \overline{A_\alpha} \subseteq \overline{\bigcup_\alpha A_\alpha}$

   ¿Pueden ser estrictas las inclusiones?

8. Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Pruebe que:

   a) $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A^\circ \subseteq (\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A)^\circ$ y
   b) $(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A)^\circ \subseteq \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A^\circ$.

   ¿Pueden ser estrictas las inclusiones?

9. Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$. Pruebe que:

   a) $(X \setminus A)^\circ = X \setminus \overline{A}$;
   b) $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ$.

10. Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$. Pruebe que:

    a) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \overline{A} \setminus A^\circ$;
    b) $X \setminus \partial A = A^\circ \cup (X \setminus A)^\circ$;
    c) $\overline{A} = A \cup \partial A$;
    d) $A^\circ = A \setminus \partial A$;
    e) A es abierto sii $A \cap \partial A = \varnothing$; y
    f) A es cerrado sii $\partial A \subseteq A$.

11. Considere el conjunto $X = [0,1] \times [0,1]$ con la topología del orden lexicografico y determine la clausura y el interior de los siguientes subconjuntos de X.

    a) $\{(1/n, 0) : n \in \mathbb{N}\}$,
    b) $\{(1 - 1/n, 1/2) : n \in \mathbb{N}\}$,
    c) $\{(x, 0) : 0 < x < 1\}$,
    d) $\{(x, 1/2) : 0 < x < 1\}$,
    e) $\{(1/2, y) : 0 < y < 1\}$.

12. Pruebe que todo cerrado de $\mathbb{R}^2$ es la frontera de un subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

Definiciones equivalentes

13. Sea X un conjunto. Un *sistema de filtros de entornos* $\mathcal{F}$ *en* X es una regla que a cada elemento $x \in X$ asigna una familia $\mathcal{F}_x \in \mathcal{P}(X)$ de manera que

    (A1) si $x \in X$, $\mathcal{F}_x \neq \varnothing$;
    (A2) si $x \in X$ y $A \in \mathcal{F}_x$, entonces $x \in A$;
    (A3) si $x \in X$, $A \in \mathcal{F}_x$ y $B \in \mathcal{P}(X)$ son tales que $A \subseteq B$, entonces $B \in \mathcal{F}_x$;
    (A4) si $x \in X$ y A, $B \in \mathcal{F}_x$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}_x$;
    (A5) si $x \in X$ y $A \in \mathcal{F}_x$, entonces existe $B \in \mathcal{F}_x$ tal que $B \subseteq A$ y $B \in \mathcal{F}_y$ para todo $y \in B$.

    Probar que

    a) Si (X, τ) es un espacio topológico y para cada $x \in X$ definimos

    $$\mathcal{F}_x = \{A \in \mathcal{P}(X) : \text{existe } U \in \tau \text{ tal que } x \in U \subseteq A\},$$

    entonces $\mathcal{F}$ es un sistema de filtros de entornos en X.

b) Si $\mathcal{F}$ es un sistema de filtros de entornos en X y definimos

$$\tau = \{A \in \mathcal{P}(X) : \textsf{para todo } x \in A \textsf{ es } A \in \mathcal{F}_x\} \cup \{\varnothing\},$$

entonces τ es una topología sobre X.

c) Las construcciones del item 1 y del item 2 son inversas.

14. Sea X un conjunto. Una función $c : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ es un *operador de clausura en* X si

(A1) $c(\varnothing) = \varnothing$;

(A2) si $A \in \mathcal{P}(X)$, entonces $A \subseteq c(A)$;

(A3) si $A \in \mathcal{P}(X)$, entonces $c(c(A)) = c(A)$;

(A4) si A, $B \in \mathcal{P}(X)$, entonces $c(A \cup B) = c(A) \cup c(B)$;

Probar que

a) Si (X, τ) es un espacio topológico, entonces la función

$$c : A \in \mathcal{P}(X) \mapsto \overline{A} \in \mathcal{P}(X)$$

es un operador de clausura en X.

b) Si $c : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ es un operador de clausura en X, entonces el conjunto

$$\tau = \{U \in \mathcal{P}(X) : c(X \setminus U) = X \setminus U\}$$

es una topología sobre X.

c) Las construcciones del item 1 y del item 2 son inversas.

15. Sea X un conjunto y sea $B \subseteq X$. Pruebe que la función

$$c : A \in \mathcal{P}(X) \mapsto \begin{cases} A \cup B \in \mathcal{P}(X) & \text{si } A \neq \varnothing \\ \varnothing \in \mathcal{P}(X) & \text{si } A = \varnothing \end{cases}$$

es un operador de clausura en X. Describa los abiertos de la topología correspondiente.

Bases y subbases

16. Sea $\{\mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una colección de topologías en X. Probar que $\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{T}_\alpha$ es una topología en X. ¿Es $\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{T}_\alpha$ una topología en X?

17. Sea X un conjunto y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Probar que existe una topología $\sigma(\mathcal{A})$ sobre X que cumple que

- todo elemento de $\mathcal{A}$ es abierto para $\sigma(\mathcal{A})$, y
- si τ es una topología sobre X tal que todo elemento de $\mathcal{A}$ es abierto para τ, entonces $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \tau$.

En otras palabras, $\sigma(\mathcal{A})$ es la topología menos fina que contiene a $\mathcal{A}$ (la mínima en el orden dado por la inclusión). La topología $\sigma(\mathcal{A})$ es la *topología generada* por $\mathcal{A}$.

18. Describa la topología generada por $\mathcal{A} = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}$ sobre el conjunto $X = \{a, b, c, d\}$.

19. Sea $K = \{1/n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ y consideremos los siguientes subconjuntos de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_1 &= \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R},\ a < b\},\\
\mathcal{B}_2 &= \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R},\ a < b\},\\
\mathcal{B}_3 &= \{(a,b] : a,b \in \mathbb{R},\ a < b\},\\
\mathcal{B}_4 &= \mathcal{B}_1 \cup \{B \setminus K : B \in \mathcal{B}_1\},\\
\mathcal{B}_5 &= \{(a,+\infty) : a \in \mathbb{R}\},\\
\mathcal{B}_6 &= \{(-\infty,a) : a \in \mathbb{R}\},\\
\mathcal{B}_7 &= \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \mathbb{R} \setminus B \text{ es finito}\}.
\end{aligned}$$

a) Muestre que cada uno de $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_7$ es una base para una topología en $\mathbb{R}$ y compare las topologías correspondientes.

b) Muestre que $\mathcal{B}_5 \cup \mathcal{B}_6$ es una subbase para la topología generada por $\mathcal{B}_1$.

c) Determinar la clausura del conjunto K en cada una de las siete topologías.

20. Sea $\mathcal{B} = \{(a,b) : a < b\} \cup \{\{n\} : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Muestre que $\mathcal{B}$ es base de una topología sobre $\mathbb{R}$. Describa el interior de los subconjuntos de $\mathbb{R}$ con respecto a ella.

Redes

21. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Probar que las redes convergentes verifican las siguientes propiedades:

a) Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es eventualmente constante, entonces $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a la constante.

b) Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a x, entonces toda sub-red de $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a x.

c) Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ verifica que toda sub-red tiene una sub-sub-red que converge a x, entonces $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a x.

d) Sean Λ un conjunto dirigido, y para cada $\alpha \in \Lambda$ sea Γ_α un conjunto dirigido. Supongamos que para cada $\alpha \in \Lambda$ se tiene una red $(x_k^\alpha)_{k\in\Gamma_\alpha}$ que converge a $x^\alpha \in X$, y que además $(x^\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a $x \in X$. Consideremos $\Phi = \Lambda \times \prod_{\alpha\in\Lambda} \Gamma_\alpha$ ordenado por el orden producto, esto es,

$$(\alpha, (k_\beta)_{\beta\in\Lambda}) \geq (\alpha', (k'_\beta)_{\beta\in\Lambda}) \iff \alpha \geq \alpha' \text{ y } k_\beta \geq k'_\beta\ \forall \beta \in \Lambda.$$

Entonces la red $(\alpha, (k_\beta)_{\beta\in\Lambda}) \mapsto x^\alpha_{k_\alpha}$ converge a x.

22. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Probar que

$$\overline{A} = \{x \in X :\ \exists (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset A, \text{ y } x_\alpha \to x\}$$

23. Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es una red, decimos que $x \in X$ es un punto de acumulación de la red si para todo $A \in \mathscr{F}_x$, el conjunto $\{\alpha \in \Lambda : x_\alpha \in A\}$ es cofinal en Λ. Probar que x es un punto de acumulación de la red si y sólo si existe una subred de $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ que converge a x.

Sugerencia: para probar $\Rightarrow$), considere como conjunto dirigido el formado por los pares (α, U) con $\alpha \in \Lambda$ y U un entorno (abierto) de x que contiene a x_α.

Cerrados irreducibles y espacios noetherianos

24. Sea X un espacio topológico. Decimos que un conjunto cerrado $F \subseteq X$ es *irreducible* si siempre que $F = F_1 \cup F_2$, con F_1 y F_2 subconjuntos cerrados de X, se tiene que $F_1 = F$ ó $F_2 = F$.

    a) Si la topología de X es la topología cofinita de X y X es infinito, entonces X es irreducible.

    b) Sea A un anillo conmutativo. Probar que el conjunto de ideales primos de A, junto con A, es subbase de una topología en (el conjunto subyacente de) A y que los complementos de los ideales primos son cerrados irreducibles para esa topología.

    c) Si X es irreducible y $U \subseteq X$ es abierto y no vacío, entonces U es denso en X.

25. Decimos que un espacio topológico X es *noetheriano* si siempre que tenemos una sucesión decreciente de cerrados
$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_i \supseteq F_{i+1} \supseteq \cdots$$
existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $F_i = F_{i_0}$ para todo $i \geq i_0$.

    Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

    a) X es noetheriano.

    b) Toda familia no vacía de cerrados de X tiene un elemento minimal.

    c) Si
    $$U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots \subseteq U_i \subseteq U_{i+1} \subseteq \cdots$$
    es una sucesión creciente de abiertos de X, entonces existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $U_i = U_{i_0}$ para todo $i \geq i_0$.

    d) Toda familia no vacía de abiertos de X tiene un elemento maximal.

26. Sea X un espacio topológico noetheriano.

    a) Si $F \subseteq X$ es cerrado, existen $n \in \mathbb{N}$ y cerrados irreducibles $F_1, \ldots, F_n \subseteq X$ tales que $F = F_1 \cup \cdots \cup F_n$.

    b) Si $n, m \in \mathbb{N}$ y $F_1, \ldots, F_n, F'_1, \ldots, F'_m \subseteq X$ son cerrados irreducibles tales que

    - $F_i \not\subseteq F_j$ si $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ y $i \neq j$;
    - $F'_i \not\subseteq F'_j$ si $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ y $i \neq j$; y
    - $F_1 \cup \cdots \cup F_n = F'_1 \cup \cdots \cup F'_m$,

    entonces $n = m$ y existe una permutación $\sigma \in S_n$ tal que $F'_i = F_{\sigma(i)}$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.