

---

# ANÁLISIS NUMÉRICO

Segundo Cuatrimestre 2023

---

## Práctica N° 5: Elementos Finitos 1D

### Espacios de Sobolev

**Ejercicio 1** a) Probar que la función definida como  $h(x) = \exp(-1/x^2)$  para  $x > 0$ ,  $h(x) = 0$  para  $x \leq 0$ , pertenece a  $C^\infty(\mathbb{R})$ .

b) Probar que la función  $g(x) = h(x-a)h(b-x)$ ,  $a < b$  es  $C^\infty(\mathbb{R})$  con soporte en  $[a, b]$ .

c) Construir una función en  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  con soporte en una bola o en un intervalo.

**Ejercicio 2** a) Sea  $f \in L^2(I)$  tal que  $\int_I fg \, dx = 0 \, \forall g \in L^2(I)$ . Probar que  $f = 0$  c.t.p.

b) Sea  $f \in L^2(I)$  tal que  $\int_I fg \, dx = 0$  para toda  $g \in C_0^k(I)$ . Probar que  $f = 0$  c.t.p.

c) Sea  $f \in L^2(I)$  tal que  $\int_I fg \, dx = 0$  para toda  $g \in C_0^\infty(I)$ . Probar que  $f = 0$  c.t.p.

**Ejercicio 3** a) Demostrar que si  $f, g \in L^p$  son tales que  $\int_I f\phi' = -\int_I g\phi$  para toda  $\phi \in C_0^1(I)$  entonces  $g$  es única.

b) Si la  $f$  del item previo es derivable entonces  $f' = g$ .

**Ejercicio 4** a) Dada una función  $\psi \in C_0^0(I)$  tal que  $\int_I \psi = 1$  probar que  $\theta = \omega - (\int_I \omega)\psi \in C_0^0(I)$  para todo  $\omega \in C_0^1(I)$ , además  $\int_I \theta = 0$ .

b) Si  $I = (a, b)$ , sea  $\phi(x) = \int_a^x \theta$ , probar que  $\phi(x) \in C_0^1(I)$ , más aún  $\phi' = \theta$ .

c) Si  $f$  en  $L_{loc}^1$  y  $\int_I f\phi' = 0$  para toda  $\phi \in C_0^1(I)$  entonces  $f = cte$  c.t.p. (Sug. tomar  $\phi$  como en el item previo y utilizar el Ejercicio 2).

**Ejercicio 5** Si  $g \in L_{loc}^1(I)$  tomar  $c \in I$  cualquiera, y escribir para  $x \in I$   $\int_c^x g = v(x)$ , entonces  $\int_I v\phi' = -\int_I g\phi$  para todo  $\phi \in C_0^1(I)$ .

**Ejercicio 6** Utilizando el ejercicio previo y tomando  $f$  y  $g$  como en el Ejercicio 3 deducir la identidad  $f(x) = f(c) + \int_c^x g$  para casi todo  $x$ .

**Ejercicio 7** Probar que si  $f \in H^1(I)$  entonces  $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_{H^1}$ .

**Ejercicio 8** Usando el ejercicio previo demostrar que si  $u \in H_0^1(I)$ , con  $I = (a, b)$  entonces  $u(a) = u(b) = 0$ . Probar, utilizando este hecho, que para  $I$  acotado en  $\mathbb{R}$  existe una constante  $C$  (dependiente de  $|I|$ ) tal que

$$\|u\|_{L^2} \leq C \|u'\|_{L^2} \quad \forall u \in H_0^1 \quad (\text{Desigualdad de Poincaré})$$

y por ende

$$\|u\|_{H^1(0,1)} \leq C \|u'\|_{L^2} \quad \forall u \in H_0^1$$

**Ejercicio 9** Sea  $I = (-1, 1)$ . Comprobar que:

- a) La función  $u(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$  pertenece a  $W^{1,p}(I)$  para todo  $1 \leq p \leq \infty$  y que  $u' = H$ , donde  $H$  es la función de Heaviside:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}$$

- b) La función  $H \notin W^{1,p}$  para  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Ejercicio 10** Sea

$$u(x, y) = \frac{1}{\|(x, y)\|^\epsilon}$$

con  $0 < \epsilon < 1$  y  $(x, y) \in B_R(0)$ .

- a) Probar que  $u$  tiene derivadas generalizadas de primer orden en  $L^1(B_R(0))$ ;  $u \in L^2(B_R(0))$  pero  $u$  no tiene representante continuo en  $B_R(0)$ .
- b) Encontrar los valores de  $p$  para los que  $u \in W^{1,p}(B_R(0))$ .

**Ejercicio 11** a) Demostrar que la función

$$u(x, y) = |\ln(x^2 + y^2)|^{\frac{1}{3}}$$

está en  $H^1(B_{\frac{1}{2}})$  donde  $B_{\frac{1}{2}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < \frac{1}{2}\}$ .

- b) ¿Para que valores de  $\alpha$  la función  $u(x, y) = |\ln(x^2 + y^2)|^\alpha$  está en  $H^1(B_{\frac{1}{2}})$ ?

Concluir que las funciones de  $H^1$  no son necesariamente acotadas y por ende el resultado del Ejercicio 7 no se extiende a más dimensiones.

## Teoría de Elementos Finitos 1D

**Ejercicio 12** Probar que las siguientes formas bilineales son continuas y coercitivas en los respectivos espacios  $V$

- a)  $V = \mathbb{R}^n$ ,  $a(u, v) = vAu^t$  con  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A$  definida positiva.
- b)  $V = L^2(0, 1)$ ,  $a(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x)\rho(x)dx$ , con  $\rho(x) > 0$  y continua en  $[0, 1]$ .

- c)  $V = H^1(0, 1)$ ,  $a(u, v) = \int_0^1 (u(x)v(x)\rho_1(x) + u'(x)v'(x)\rho_2(x))dx$ , con  $\rho_i(x) > 0$  y continuas en  $[0, 1]$ .
- d)  $V = H_0^1(0, 1)$ ,  $a(u, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)\rho(x)dx$ ,  $\rho(x) > 0$ , continua en  $[0, 1]$ .
- e)  $V = H^1(0, 1)$ ,  $a(u, v) = \int_0^1 (u'(x)v'(x)\rho_1(x) + ku'(x)v(x) + u(x)v(x)\rho_2(x))dx$  con  $\rho_i$  como en los items previos, y  $k$  constante suficientemente chico. Es esta forma bilineal simétrica?

**Ejercicio 13** Para los problemas 3 y 5 de la práctica anterior

- a) Probar que existe una solución única en  $H_0^1(I)$  de la formulación débil.
- b) Probar que la solución débil es suficientemente regular (esto es, que pertenece a  $C^2(\bar{I})$ ), y que proporciona una solución clásica.

**Ejercicio 14** Sea  $I = (0, 1)$  y sean  $x_i$  tales que  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = 1$  una partición de  $I$ .

- a) Definimos para cada  $1 \leq i \leq N - 1$ ,  $G_i(x) = \begin{cases} (1 - x_i)x & 0 \leq x \leq x_i \\ x_i(1 - x) & x_i \leq x \leq 1 \end{cases}$  Verificar que  $G_i \in H_0^1(0, 1)$  y que  $\forall w \in H_0^1(0, 1)$  se tiene que

$$\int_0^1 w'(s)G_i'(s)ds = w(x_i)$$

- b) Dada  $f \in L^2(0, 1)$  considerar el problema

$$\begin{cases} -u'' = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Escribir el problema en forma variacional sobre  $H_0^1$  y dar formulación aproximada de Galerkin utilizando el espacio

$$V_h = \{u \in H_0^1 \text{ tal que } u \in P_1(I_i) \text{ para todo } 0 \leq i \leq N - 1\}$$

- Demostrar que ambos problemas variacionales tienen solución única.
- Demostrar que  $\int_0^1 (u - u_h)'v_h' = 0$  para todo  $v_h \in V_h$ . De aquí y del item previo concluya que  $u(x_i) = u_h(x_i)$ , i.e, la solución obtenida numéricamente interpola a  $u$  en los nodos (aquí  $u_h$  denota la solución del problema discreto). Verificar que efectivamente, en el ejercicio 8 sucede eso.

- c) Hallar la matriz de rigidez (usando las bases de Lagrange).

**Ejercicio 15** Demostrar que el problema variacional del ejercicio 12 de la práctica anterior tiene solución única sobre  $H_0^2(0, 1)$ .

**Ejercicio 16** Considerar el problema:

$$\begin{cases} -(a(x)u'(x))' + b(x)u'(x) = f(x) \text{ en } I = (0, 1) \\ u(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

con  $a \in C^1(\bar{I})$  y  $b, f \in C(\bar{I})$ .

- a) Plantear la formulación débil del problema, en un espacio adecuado  $V$ .
- b) Demostrar que para toda  $u \in V$  se tiene que:

$$\|u\|_{L^2(I)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|u'\|_{L^2(I)}$$

- c) Probar que si  $a \geq \alpha > 0$  y

$$\|b\|_\infty \leq \frac{1}{2} \min_{x \in [0,1]} a(x)$$

entonces existe una única solución del problema débil.

- d) Probar que la solución débil es también solución del problema continuo.

**Ejercicio 17** Considerar el problema:

$$\begin{cases} -u'' + \beta u' = f & x \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

siendo  $\beta > 0$ .

- a) Plantear la formulación débil de este problema, de la forma:

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V, \quad (1)$$

para un espacio adecuado  $V$ .

- b) Probar que  $F$  y  $a$  son continuas, y que si  $\beta$  es suficientemente chico,  $a$  es coercitiva. Concluya existencia y unicidad de solución para el problema débil.
- c) Sea  $\mathcal{T}_h$  una partición uniforme del intervalo  $[0, 1]$ , de parámetro  $h > 0$  dada por  $\{x_i\}$ ,  $x_i = ih$ . Sea

$$V_h = \{f \in C([0, 1]) : f|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathcal{P}_1\}.$$

Considerar el problema discretizado:

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V_h \quad (2)$$

Si  $u_h \in V_h$  es la solución de (2), y  $u$  es la solución de (1), probar, utilizando el lema de Cèa, que

$$\|u - u_h\|_{H^1} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

**Ejercicio 18** Dada  $f \in L^2(0, 1)$ , considere el siguiente problema:

$$\begin{cases} u \in C^2[0, 1] \\ -u''(x) + au'(x) + u(x) = f(x) & 0 < x < 1, \quad a \in \mathbb{R} \\ u(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

- a) Hallar la forma débil en un espacio adecuado  $V$ .

- b) Probar que si  $u \in C^2([0, 1])$  es una solución débil entonces es solución clásica del problema (incluyendo las condiciones de borde).
- c) Probar que si  $u \in H^1(0, 1)$  y  $u(0) = 0$ , entonces vale la desigualdad de Poincaré.
- d) Probar que si  $|a| < 2$ , existe una solución única en  $V$  de la formulación débil.
- e) Describir un espacio aproximante  $V_h \subset V$ , adecuado para este problema, y mostrar una base.

**Ejercicio 19** Sea  $I = (0, 1)$  y  $k(x)$  la función

$$k(x) = \begin{cases} k_1 & \text{si } x \in I_1 = \left(0, \frac{1}{2}\right) \\ k_2 & \text{si } x \in I_2 = \left(\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}$$

con  $k_1, k_2 > 0$  constantes. Considerar el problema variacional: Hallar  $u \in H_0^1(I)$  tal que

$$\int_I k(x)u'v' dx = \int_I v \quad \forall v \in H_0^1(I). \quad (3)$$

- a) Probar que (3) tiene una única solución  $u$ .
- b) Probar que  $u$  es solución (en sentido clásico) de

$$\begin{cases} -k(x)u'' = 1 & \text{en } I_1 \cup I_2 \\ u(0) = u(1) = 0 \\ u \text{ continua en } x = \frac{1}{2} \\ k_1u' \left(\frac{1}{2}^{(-)}\right) = k_2u' \left(\frac{1}{2}^{(+)}\right). \end{cases}$$

- c) Discretizar la ecuación usando elementos finitos lineales sobre una malla uniforme con  $2N$  intervalos de longitud  $h = \frac{1}{2N}$ . Hallar la matriz de rigidez y el vector independiente del sistema resultante de tamaño  $(2N - 1) \times (2N - 1)$ .
- d) Interpretar desde el punto de vista de diferencias finitas cómo queda impuesta la condición sobre la derivada de  $u$  en  $x = \frac{1}{2}$  en la discretización dada en (c).