
ANÁLISIS NUMÉRICO

Segundo Cuatrimestre 2023

Práctica N° 3: Diferencias Finitas (Ecuaciones Hiperbólicas)

Ejercicio 1 Para resolver la ecuación de convección-difusión

$$U_t = aU_x + \mu U_{xx} \quad a > 0, c \in \mathbb{R}$$

se quiere aproximar la solución con un esquema explícito y centrado de segundo orden en x :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \mu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

- (a) Dar condiciones sobre $\Delta t, \Delta x$ que aseguren la estabilidad.
- (b) Analizar los resultados casos límite $a = 0$ (problema sin convección) y $\mu = 0$ (problema sin difusión). ¿Qué ocurre?

Ecuación de transporte lineal

Ejercicio 2 Sea a una constante positiva.

- (i) Resolver la ecuación $U_t + aU_x = 0$, en toda la recta, con dato inicial $u(x, 0) = u_0(x)$. Proceder análogamente con $U_t - aU_x = 0$.
- (ii) Reemplazar $e^{i(kx+\omega t)}$ en ambas ecuaciones y hallar ω en cada caso. Concluir que ningún modo es amortiguado y que en un lapso Δt su fase cambia en $-ak\Delta t$.

Ejercicio 3 (Up-Wind) Para aproximar la ecuación $U_t + aU_x = 0$ se consideran los métodos:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^q - u_{j-1}^q}{\Delta x} = 0$$

con $q = n$ (explícito) y $q = n + 1$ (implícito).

- (a) Estudiar la estabilidad con el método de Fourier. ¿El resultado depende del signo de a ?

Ejercicio 4 (Difusión artificial) Verificar que el esquema explícito con up-wind para la ecuación $U_t + U_x = 0$ puede escribirse como:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = \frac{\Delta x}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}.$$

Observar que esta expresión coincide con la de un esquema centrado en x para la ecuación

$$U_t + U_x = \frac{\Delta x}{2} U_{xx}.$$

Concluir que el método up-wind puede interpretarse como un esquema centrado en x para la ecuación de transporte al cual se le agrega “difusión artificial”. Comparar el orden del esquema up-wind con la de este último. ¿Hay alguna contradicción?

Ejercicio 5 (Lax-Friedrichs) Para resolver la ecuación $U_t + aU_x = 0$, considerar el siguiente método explícito:

$$\frac{u_i^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} = 0$$

- ¿De qué orden es el error de truncado?
- Analizar qué restricción debe imponerse para que se satisfaga la condición CFL.
- Estudiar la estabilidad mediante el método de Fourier ¿El resultado depende del signo de a ?

Ejercicio 6 (Lax-Wendroff) Para resolver la ecuación $U_t + aU_x = 0$, se considera el siguiente método explícito:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{\Delta t}{2} a^2 \left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right) = 0$$

- Interpretar el método propuesto como una discretización centrada de un problema con “difusión artificial”.
- ¿De qué orden es el error de truncado en este caso?
- Estudiar la estabilidad mediante el método de Fourier ¿El resultado depende del signo de a ?

Ejercicio 7 (Leapfrog) Dada la ecuación $U_t + aU_x = 0$ con $a \in \mathbb{R}$ y $U(x, 0) = U_0(x)$ se propone el método de 2 pasos dado por:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

- Analizar que restricción debe imponerse para que se satisfaga la condición CFL.
- ¿Cómo puede aproximarse el valor de la solución a tiempo Δt ? ¿Qué condición de borde puede imponerse para resolver el problema numéricamente?
- Considerar $a > 0$ y demostrar que si $\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{a}$ el método resulta estable.

Ejercicio 8 Para la ecuación $U_t + aU_x = 0$ se propone un esquema con diferencias a izquierda, de la forma

$$u_j^{n+1} = d_{-2}u_{j-2}^n + d_{-1}u_{j-1}^n + d_0u_j^n$$

Determinar los coeficientes d_{-2}, d_{-1} y d_0 , para que el método tenga un error de truncamiento del mayor orden posible. En tal caso, hallar condiciones que aseguren la validez de la condición CFL y la estabilidad por el método de Fourier.

Ejercicio 9 Implementar los métodos de los ejercicios 3, 5, 6 y 7 para condiciones iniciales $U_0(x) = \sin(kx)$ con k entero y comparar los resultados obtenidos con la solución exacta. ¿Qué ocurre con $U_0(x) = \chi_{[0,1/2]}(x)$?

Ejercicio 10 Muestrar que si $q(x) \approx c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 \dots$ para $x \approx 0$ entonces, para $x \approx 0$

$$\operatorname{arctg}(q(x)) = c_1x + c_2x^2 + (c_3 - \frac{1}{3}c_1^3)x^3 \dots$$

Ejercicio 11 (Error de Amplitud y Fase) Estudiar los errores del factor de amortiguamiento $\lambda(k)$ y de fase para el k -ésimo modo que se cometen al resolver la ecuación $U_t + aU_x = 0$ con los métodos de los ejercicios 3, 5, 6 y 7.

Leyes de Conservación

Ejercicio 12 Se considera la Ley de Conservación

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} U dx = f(U(t, x_1)) - f(U(t, x_2)) \quad \forall x_1, x_2 \in [a, b] \quad (1)$$

Probar que una función U suave que satisface (1) también verifica

$$U_t + f(U)_x = 0 \quad x \in [a, b]. \quad (2)$$

Probar que la siguiente discretización

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + \frac{f(u_i^n) - f(u_{i-1}^n)}{h} = 0$$

satisface una relación análoga a (1) con $x_1 = a, x_2 = b$, y analizar qué ocurre con la discretización:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + f'(u_i^n) \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} = 0$$

¿Qué error de truncado poseen estos métodos?

Ejercicio 13 Considerar la siguiente *ecuación de Burgers inviscida* (caso particular de (2) para $f(u) = \frac{u^2}{2}$):

$$U_t + UU_x = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

con dato inicial

$$U(x, 0) = U_0(x)$$

- (a) Verificar que la solución queda definida implícitamente por $U = U_0(x - Ut)$.
 (b) Las curvas características son de la forma $(x(t), t)$ con $x(t) = x_0 + tU_0(x_0)$.
 (c) Demostrar que

$$U_x = \frac{U'_0(x - Ut)}{1 + tU'_0(x - Ut)}$$

y por ende si para algún x_0 es $U'_0(x_0) < 0$ entonces existe un tiempo crítico t_c en el cual deja de existir U_x . Haga la misma cuenta para U_t .

Ejercicio 14 Considerar la *ecuación de Burgers inviscida*

$$U_t + \frac{1}{2}(U^2)_x = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (\text{forma conservativa})$$

$$U_t + UU_x = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (\text{forma semi-lineal})$$

Implementar las siguientes discretizaciones

$$\text{Up-Wind Conservativo:} \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -\frac{1}{2} \frac{(u_i^n)^2 - (u_{i-1}^n)^2}{\Delta x}$$

$$\text{Up-Wind No-Conservativo:} \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -u_i^n (u_i^n - u_{i-1}^n)$$

para $x \in [0, 10]$ y un tiempo final T_f , con los datos iniciales

$$(a) \quad U_0(x) = \chi_{(-\infty, \frac{1}{2})}(x) + 0.2, \quad T_f = 15 \quad (c) \quad U_0(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}, \quad T_f = 30$$

$$(b) \quad U_0(x) = \chi_{(-\infty, \frac{1}{2})}(x), \quad T_f = 15 \quad (d) \quad U_0(x) = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}, \quad T_f = 30$$

y distintos valores de Δt y Δx tendiendo a cero de modo que $\frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$.

¿Ambos métodos son convergentes? ¿Convergen al mismo resultado en todos los casos?

Ejercicio 15 Se considera la ecuación $U_t + f(U)_x = 0$. Verificar que para una solución U y f suficientemente regulares se tiene

$$U_{tt} = (f'(U)f(U)_x)_x.$$

Dar la expansión de Taylor

$$\frac{U(x_j, t_{n+1}) - U(x_j, t_n)}{\Delta t} \sim U_t(x_j, t_n) + \frac{\Delta t}{2} U_{tt}(x_j, t_n) + \dots$$

reemplazando derivadas temporales por espaciales adecuadamente, y tomando diferencias centradas en el espacio, deducir el método de Lax-Wendroff para la ley de conservación (2)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -\frac{f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)}{2\Delta x} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[f'(u_{j+1/2}^n) \frac{f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n)}{\Delta x} - f'(u_{j-1/2}^n) \frac{f(u_j^n) - f(u_{j-1}^n)}{\Delta x} \right]$$

donde $u_{j\pm 1/2}^n = \frac{u_j^n + u_{j\pm 1}^n}{2}$. Observar que si $f' = cte$ se obtiene el método correspondiente del ejercicio 6.

Ecuación de Ondas

Ejercicio 16 Para la ecuación de ondas

$$U_{tt} = U_{xx} \quad x \in (0, 1), \quad t > 0$$

considerar el método explícito que se obtiene al tomar diferencias centradas en x y en t

$$u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1} = r(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n),$$

donde ahora tomamos $r = (\frac{\Delta t}{\Delta x})^2$

- (a) Estudiar consistencia y estabilidad del método propuesto.
- (b) Implementar el método, para las condiciones de contorno $U(0, t) = U(1, t) = 0$ e iniciales

$$U(x, 0) = \frac{1}{8} \sin(\pi x), \quad U_t(x, 0) = 0$$

y comparar la solución numérica contra la solución exacta, para distintos valores de $\Delta t, \Delta x$.

Ejercicio 17 Estudiar la consistencia y estabilidad del siguiente método para $U_{tt} = U_{xx}$:

$$u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1} = \frac{1}{2}r\{(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) + (u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1})\}.$$

Ejercicio 18 Definiendo $P = U_x$ y $Q = U_t$, verificar que la ecuación de ondas $U_{tt} = U_{xx}$ puede escribirse como el siguiente sistema de dos ecuaciones en derivadas parciales de primer orden

$$\begin{cases} Q_t = P_x \\ P_t = Q_x \end{cases}$$

Discretizar cada una de las ecuaciones según Lax-Friedrichs. Probar que la discretización para el sistema de ecuaciones es estable para $\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$.