Análisis Numérico

Segundo Cuatrimestre 2023

Práctica N° 2: Diferencias Finitas: Ecuación parabólicas

Ejercicio 1 Para aproximar la ecuación $U_t = U_{xx}$ se utiliza el esquema en diferencias finitas que se obtiene al realizar una discretización explícita en la variable temporal y diferencias centradas para la segunda derivada espacial:

$$u_j^{n+1} = ru_{j-1}^n + (1-2r)u_j^n + ru_{j+1}^n \quad \text{donde } r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = k/h^2$$

Suponiendo que U tiene derivadas continuas y acotadas hasta el tercer orden en t, y hasta de orden seis en x, probar que el error de discretización $e_j^n = U(x_j, t_n) - u_j^n$ es solución de la ecuación en diferencias:

$$e_j^{n+1} = re_{j-1}^n + (1-2r)e_j^n + re_{j+1}^n + kT(x_j, t_n)$$

donde T es el error de truncado:

$$T(x_j, t_n) = \frac{h^2}{12}\left(6rU_{tt} - U_{xxxx}\right)_{j,n} + \frac{k^2}{6}U_{ttt}(x_j, t_n + \theta_n k) - \frac{h^4}{360}U_{xxxxxx}(x_j + \theta_j h, t_n)$$

con $-1 < \theta_j < 1$, $0 < \theta_n < 1$.

(a) Probar que para $r > 0$ el error de truncado es $O(h^2)$, y que en el caso $r = 1/6$ es $O(h^4)$.

(b) Probar que si $0 < r \leq 1/2$ entonces el error global E_n dado por

$$E_n = \max_{0 \leq j \leq N} \{|e_j^n|\},$$

satisface la siguiente estimación en función del tiempo:

$$E_n \leq tM,$$

donde M es el valor máximo de $|T|$. En particular, observe que si además $t \leq T_f$ y U_{tt} y U_{xxxx} estan acotadas luego

$$E_n \leq CT_f k \tag{1}$$

para una constante C independiente de h y k.

Ejercicio 2 Escribir un programa para integrar con el método explícito del Ej. 1, la ecuación del calor $u_t = u_{xx} + f(x,t)$ en el intervalo $[0,1]$ para un dato inicial $u(x,0) = u_0(x)$ arbitrario y con condiciones de borde de tipo Dirichlet homogeneas.

(a) Resolver el caso $f(x,t) \equiv 0$, $u_0(x) = x\chi_{[0,1/2]} + (1-x)\chi_{[1/2,1]}$.

Para ello, considere $h = 0.05$, $k = 0.0012$, y $k = 0.0013$. Avance por lo menos 50 pasos. ¿Qué sucede? Verifique el valor de $r = k/h^2$ en cada caso.

(b) Ahora, tomando $k = 0.0013$ resolver

i. $u_t = u_{xx} \qquad u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad u(x,0) = x(1-x)$,

ii. $u_t = u_{xx} \qquad u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad u(x,0) = \sin(\pi x)$.

Observar que ambos casos resultan estables en los primeros 50 pasos. ¿Qué ocurre con (i) para 100 pasos? ¿Y con (ii)? ¿Por qué resulta mucho más estable este último caso?

(c) Elegir uno de los casos anteriores y resuelva analíticamente. Estudiar el error del método contra la solucion exacta hasta el tiempo $T_f = 1$. Para ello, tomar $r = 0.5$, diversos pasos de discretización Δt y Δx, y graficar $\log(E_n)$ en cada paso de tiempo, donde $E_n = \max_{\{0\leq j\leq N\}}\{|e_j^n|\}$, $N = 1/(\Delta x)$.

Nota: Observe que el error decrece a medida que el tiempo avanza lo que indica que la cota (1) obtenida en el Ejercicio 1 no es demasiado buena.

Ejercicio 3 Dado $J \in \mathbb{N}$ sea $h = \frac{1}{J}$ y considerar el producto interno $(v,w) = h\sum_{j=0}^{J} v_j\, w_j$ para $v, w \in \mathbb{R}^{J+1}$, y sea $l_{2,h}^0$ el subespacio de $\mathbb{R}^{J+1}$ dado por $l_{2,h}^0 = \{v = (v_0, v_1, \ldots, v_J) \in \mathbb{R}^{J+1} : v_0 = v_J = 0\}$. Para cada $p = 1, \ldots, J-1$, sea $\varphi_p \in l_{2,h}^0$ definido por

$$\varphi_{p,j} = \sqrt{2}\sin(\pi p j h), \qquad j = 0\ldots, J.$$

Probar que $\{\varphi_p : p = 1, \ldots, J\}$ es una base ortonormal de $l_{2,h}^0$.

Ejercicio 4 (Método explícito) Considere la ecuación $U_t = U_{xx}$ con condiciones de Dirichlet homogéneas. Mostrar que

(a) El método que se obtiene al utilizar diferencias forward en el tiempo y centradas en el espacio (del Ej. 1) es consistente con orden 1 en Δt y 2 en Δx, y estable en norma $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ para $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$.

Sug. Para la $\|\cdot\|_\infty$, busque condiciones para que se satisfaga un principio del máximo.

(b) El método explícito de dos pasos que se obtiene al aplicar diferencias centradas en el tiempo

$$u_j^{n+1} - u_j^{n-1} = 2r(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n)$$

es consistente con orden 2 en Δt y Δx, pero no es estable para ningún $r > 0$.

Ejercicio 5 (Método implícito) Considerar la ecuación $U_t = aU_{xx}$ con condiciones de Dirichlet homogéneas, donde $a > 0$ es la constante de difusividad. Para el método implícito de primer orden:

$$u_j^{n+1} - u_j^n = ra(u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1})$$

Demuostrar que

(a) El error de truncado es orden 1 en Δt y 2 en Δx.

(b) El método resulta incodicionalmente estable en norma $\|\cdot\|_2$ y en norma $\|\cdot\|_\infty$. ¿Qué obtiene con el método de Fourier?

Ejercicio 6 (Método theta) Para la ecuación $U_t = aU_{xx}$ se considera el siguiente método, con $0 \leq \theta \leq 1$:

$$u_j^{n+1} - u_j^n = ra\{(\theta(u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}) + (1-\theta)(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n)\}$$

(a) Estudiar la estabilidad mediante el método de Fourier.

(b) Estudiar el error de truncado. ¿Qué ocurre con el orden en Δt si $\theta = 1/2$?

(c) Implementar el método, tomando θ para parámetro. Para el método de Crank-Nicolson ($\theta = \frac{1}{2}$), estudiar numéricamente si la condición $r \leq 1$ es necesaria para tener principio del máximo en el esquema. **Sug.:** Tomar un dato inicial que valga cero en todos los nodos salvo en uno.

Ejercicio 7 Considere la ecuación del calor en $[0,1]$ con condiciones de Neumann en el borde.

$$\begin{cases} U_t(x,t) = & U_{xx}(x,t), \quad \text{para } x \in (0,1) \\ U_x(0,t) = & 0 \\ U_x(1,t) = & 0 \\ U(x,0) = & U_0(x). \end{cases}$$

(a) Implementar numéricamente los métodos que resultan de tomar una discretización temporal explícita e implicita de orden 1, junto con la discretización espacial mencionada.

(b) Analizar la estabilidad en norma $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ de ambos métodos.

Ejercicio 8 Las ecuaciones de reacción-difusión son de la forma

$$U_t = \kappa U_{xx} + R(U)$$

donde $R(u)$ suele ser un término no-lineal. Para tener estabilidad incondicional, es conveniente tomar una discretización implícita en u_{xx}, pero, para evitar tener que resolver un sistema no-lineal en cada iteración es preferible utilizar un método explícito en $R(u)$. Considere la linealización

$$U_t = \kappa U_{xx} + \alpha U$$

con α constante, y el método explícito-implícito de orden 1:

$$u_j^{n+1} - u_j^n = \kappa r(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) + \alpha \Delta t u_j^n.$$

Consideraremos condiciones de Dirichlet homogeneas, y N pasos temporales: $T_f = (\Delta t)N$.

(a) Obtener una expresión para la matriz de iteraciones M resultante: $u^{n+1} = Mu^n$.

(b) Mostrar que $\|M\|_\infty \leq (1 + \Delta t\alpha)$, y que por ende el método es incondicionalmente estable para $\alpha < 0$.

(c) Si $\alpha > 0$ mostrar que existe una constante $C(\alpha, T_f)$ independiente de $\Delta x, \Delta t$, tal que $\|M^N\|_\infty \leq C$, y entonces el esquema también resulta incodicionalmente estable. ¿Cómo depende la constante C de los parámetros del problema α,T_f?

(d) Implementar el método para el caso $R(u) = u(1-u)$ (ecuación de Fischer) y $u_0(x) = \sin^2(2\pi x)$. Estudie numéricamente la estabilidad y compare con los resultados para el caso lineal.

Ejercicio 9 Considerar el esquema en diferencias de tres capas completamente implícito (BDF2 en t) para la ecuación del calor $U_t = aU_{xx}$:

$$\frac{3}{2}u_j^{n+1} - 2u_j^n + \frac{1}{2}u_j^{n-1} = ar(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1})$$

(a) ¿Cuál es el orden del error de truncado en Δx y en Δt?

(b) Mostrar que el método es incondicionalmente estable

Ejercicio 10 Para aproximar $U_t = aU_{xx}$ se propone el siguiente esquema explícito de tres capas (Adams-Bashforth de 2 pasos en t):

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{\frac{3}{2}\delta_x(u_j^n) - \frac{1}{2}\delta_x(u_j^{n-1})}{(\Delta x)^2}$$

con $\delta_x(u_j^q) = u_{j+1}^q - 2u_j^q + u_{j-1}^q$.

(a) Demostrar que el método es de orden 2 en Δt y Δx.

(b) Demostrar que el método propuesto es estable si $r \leq \frac{1}{2a}$ con $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$.

Ejercicio 11 Los problemas unidimiensionales pueden resultar de configuraciones con simetría cilindrica o esférica. En dichos sistema de coordenadas es natural añadir condiciones de Neumann en el origen. Para la cara exterior consideramos, en este caso, condiciones de Dirichlet homogeneas, obteniendo el problema

$$\begin{cases} U_t(r,t) &= U_{rr}(r,t) + \frac{\alpha}{r}U_r(r,t), \quad \text{para } r \in (0,1), t > 0 \\ U_r(0,t) &= 0 \\ U(1,t) &= 0 \\ U(r,0) &= U_0(r). \end{cases}$$

donde $\alpha = 1, 2$ para los casos de coordenadas polares o esféricas, respectivamente.

(a) Desarrollar un esquema explíto en t y centrado de segundo orden en r. Implementar el algoritmo numéricamente, para las condiciones iniciales $U_0(r) = 1 - r^2$.

(b) Obtener condiciones suficientes sobre $\gamma = \frac{\Delta t}{(\Delta r)^2}$ para asegurar la estabilidad.

Ejercicio 12 Para aproximar la ecuación

$$U_t = U_{xx} \qquad x \in (0,1) \qquad t > 0 \qquad U(x,0) = U_0(x)$$

con condiciones de Dirichlet homogéneas, se propone el esquema

$$u_j^{n+1} - u_j^n = r\,\alpha L_{xx}(u_j^{n+1}) + r(1-\alpha)L_{xx}(u_j^n)$$

donde $L_{xx}(u_j^q) = u_{j+1}^q - 2u_j^q + u_{j-1}^q$, $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{12r}$, $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$.

(a) Demostrar que el esquema es incondicionalmente estable en $\|\cdot\|_2$.

(b) Demostrar que si $r \in [\frac{1}{6}, \frac{7}{6}]$ se tiene principio del máximo.

Ejercicio 13 Dada una función $a(x,t)$ se busca aproximar la solución de la ecuación

$$U_t = a(x,t)U_{xx} \qquad x \in (0,1) \qquad t > 0$$

con condiciones de borde de tipo dirichlet homogéneas, y para ello se utiliza el esquema

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{r}{2}a_j^{n+1/2}(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

(a) Estudiar la estabilidad y el error de truncado.

(b) Dar condiciones para que valga el principio del máximo.

(c) Reemplazar en el esquema $a_j^{n+1/2}$ por $\frac{a_j^{n+1}+a_j^n}{2}$ y repetir el análisis.

Ejercicio 14 Discretizando las derivadas en x con diferencias centradas hallar un esquema explícito que aproxime la solución de la ecuación

$$U_t = (a(x,t)U_x)_x$$

con condiciones de borde homogéneas. Estudiar estabilidad, error de truncado y principio del máximo para el esquema obtenido.

Ejercicio 15 Dada la ecuación del calor en 2-dimensiones

$$U_t = U_{xx} + U_{yy} \ \text{ con } \ (x,y) \in (0,1)\times(0,1) \qquad t > 0$$

Considere el método de diferencias explícito

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^n + r_x(u_{i+1\,j}^n - 2u_{ij}^n + u_{i-1\,j}^n) + r_y(u_{i\,j+1}^n - 2u_{ij}^n + u_{i\,j-1}^n)$$

donde $r_x = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ y $r_y = \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2}$, y un dato inicial $u_0(x,y)$.

(a) Mediante el método de Fourier, hallar condiciones sobre r_x, r_y que aseguren la estabilidad.

(b) Implementar el método para el caso de condiciones de Dirichlet homogéneas.

Ejercicio 16 Considerar el método de Crank-Nicholson para la ecuación del calor en $2D$:

$$\left(1 - \frac{1}{2}r_x\delta_x^2 - \frac{1}{2}r_y\delta_y^2\right)u^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{2}r_x\delta_x^2 + \frac{1}{2}r_y\delta_y^2\right)u^n$$

(a) Usando el método de Fourier probar que es incondicionalmente estable en norma 2.

(b) Implementar el método para condiciones de Dirichlet homogéneas.

Ejercicio 17 Considerar el método ADI (Alternating Directions Implicit Method) para la ecuación del calor en $2D$ dado por:

$$\left(1-\frac{1}{2}r_x\delta_x^2\right)\left(1-\frac{1}{2}r_y\delta_y^2\right)u^{n+1}=\left(1+\frac{1}{2}r_x\delta_x^2\right)\left(1+\frac{1}{2}r_y\delta_y^2\right)u^n$$

(a) Mostrar que este método difiere del de Crank-Nicholson en términos de orden comparable al del error de truncado y, por lo tanto, tiene un error de truncado equivalente.

(b) Utilizando el método de Fourier, probar que el método es incondicionalmente estable en norma 2.

(c) Implementar para condiciones de Dirichlet homogéneas.

John Crank
Manchester 1916 - Londres 2006

Phyllis Nicolson
Macclesfield 1917 - Sheffield 1968