Análisis Numérico

Segundo Cuatrimestre 2023

TP N° 1. Convección-Difusión. Método ADI 2D.

El objetivo es resolver el siguiente problema de convección-difusión con condiciones de Dirichlet homogeneas:

$$\begin{cases} U_t = \sigma(U_{xx} + U_{yy}) + a_x U_x + a_y U_y + f & \Omega = (0,1)^2,\ t \in (0, T_f) \\ U(x,y,t) = 0 & (x,y) \in \partial\Omega,\ t \in (0, T_f). \\ U(x,y,0) = U_0(x,y) & (x,y) \in \Omega \end{cases}$$

Consideramos una grilla del interior de Ω:

$$\{x_i = ih_x :\ 1 \leq i \leq I-1\} \times \{y_j = jh_y :\ 1 \leq j \leq J-1\}.$$

Para simplificar, puede tomarse $h_x = h_y = h$ e $I = J$. A esto agregamos la grilla temporal $\{t_n = n\Delta t :\ 0 \leq n \leq N\}$, con $N = T_f/\Delta t$. Sobre esta grilla se define u_{ij}^n, una aproximación de $U(x_i, y_j, t_n)$. Notamos u^n al arreglo (u_{ij}^n).

Definimos los operadores de discretización espacial δ_x^2 y δ_x:

$$\delta_x^2(u_{ij}^n) = \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{ij}^n + u_{i-1,j}^n}{h^2}.$$

$$\delta_x(u_{ij}^n) = \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2h}.$$

que operan sobre la coordenadas x, y análogamente δ_y^2 y δ_y que operan sobre la coordenada y. Así, podemos discretizar en el espacio con los operadores D_x, D_y, dados por

$$\begin{aligned} D_x(u^n) =& \sigma\delta_x^2(u_{ij}^n) + a_x\delta_x(u_{ij}^n) \\ D_y(u^n) =& \sigma\delta_y^2(u_{ij}^n) + a_y\delta_y(u_{ij}^n) \end{aligned}$$

Ejercicio 1 Implemente un método explícito de orden 1 tomando $f = 1, \sigma = 1, a_x = 5, a_y = 5$ $U_0(x,y) = e^{-10((x-0.5)^2+(y-0.5)^2)}$ y $T_f = 0.5$. El programa debe tomar como parámetros, además de los datos propuestos, el valor de h y de r.

Ejercicio 2 El Método de Direcciones Alternadas (ADI) consiste en resolver dos problemas en cada iteración temporal, cada uno de ellos implícito en una única coordenada, y explícito en la otra. Definiendo la solución a un paso intermedio $u^{n+\frac{1}{2}}$, calculamos

$$1)\quad \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left(D_y(u^n) + D_x(u^{n+\frac{1}{2}}) + f\right)$$

$$2)\quad \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left(D_x(u^{n+\frac{1}{2}}) + D_y(u^{n+1}) + f\right)$$

Notar que a partir de 1) puede obtener el valor de $u^{n+\frac{1}{2}}$ para luego en 2) obtener el valor de u^{n+1}.

Para los datos dados en el ítem previo, implemente el esquema propuesto. Al igual que antes, el programa debe tomar como parámetros a h y r.
Sugerencia: Preste atención a las transpuesta de matrices.

Ejercicio 3 Repita los ejercicios 1 y 2 pero tomando $f = 1, \sigma = 0.01, a_x = -1, a_y = -1$ $U_0(x, y) = \left(x - \frac{1-e^{-\frac{x}{\sigma}}}{1-e^{-\frac{1}{\sigma}}}\right)\left(y - \frac{1-e^{-\frac{y}{\sigma}}}{1-e^{-\frac{1}{\sigma}}}\right)$ y $T_f = 0.5$. Respecto al Método ADI. ¿Qué puede observar sobre la estabilidad numérica del método?

Ejercicio 4 Para cada uno de los ejemplos realizar un gráfico de curvas de nivel. Notar la relación entre los parámetros σ, a_x y a_y en el efecto de convección y difusión.

Algunas funciones/comandos útiles:

- Para crear la grilla de puntos puede usar el comando `meshgrid` del paquete `numpy`.
- Puede visualizar la solución como una superficie usando:

```
from mpl_toolkits import mplot3d
ax = plt.axes(projection='3d')
ax.plot_surface(X, Y, U)
```

- Para realizar curvas de nivel puede utilizar:

```
fig, ax = plt.subplots()
CS = ax.contour(X, Y, U)
ax.clabel(CS, inline=True, fontsize=10)
```