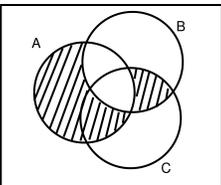
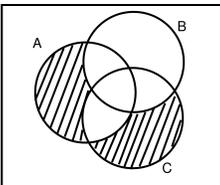
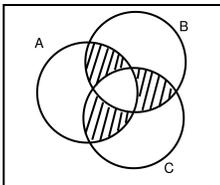


Álgebra I

Práctica 1 - Conjuntos, Relaciones y Funciones

Conjuntos

- Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas
 - $1 \in A$
 - $\{1\} \subseteq A$
 - $\{2, 1\} \subseteq A$
 - $\{1, 3\} \in A$
 - $\{2\} \in A$
- Dado el conjunto $A = \{1, 2, \{3\}, \{1, 2\}\}$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:
 - $3 \in A$
 - $\{3\} \subseteq A$
 - $\{3\} \in A$
 - $\{\{3\}\} \subseteq A$
 - $\{1, 2\} \in A$
 - $\{1, 2\} \subseteq A$
 - $\{\{1, 2\}\} \subseteq A$
 - $\{\{1, 2\}, 3\} \subseteq A$
 - $\emptyset \in A$
 - $\emptyset \subseteq A$
 - $A \in A$
 - $A \subseteq A$
- Determinar si $A \subseteq B$ en cada uno de los siguientes casos
 - $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{5, 4, 3, 2, 1\}$
 - $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, \{3\}, -3\}$
 - $A = \{x \in \mathbb{R} / 2 < |x| < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 < 3\}$
 - $A = \{\emptyset\}$, $B = \emptyset$
- Dados los subconjuntos $A = \{1, -2, 7, 3\}$, $B = \{1, \{3\}, 10\}$ y $C = \{-2, \{1, 2, 3\}, 3\}$ del conjunto referencial $V = \{1, \{3\}, -2, 7, 10, \{1, 2, 3\}, 3\}$, hallar
 - $A \cap (B \Delta C)$
 - $(A \cap B) \Delta (A \cap C)$
 - $A^c \cap B^c \cap C^c$
- Dados subconjuntos A, B, C de un conjunto referencial V , describir $(A \cup B \cup C)^c$ en términos de intersecciones y complementos, y $(A \cap B \cap C)^c$ en términos de uniones y complementos.
- Sean A, B y C conjuntos. Representar en un diagrama de Venn
 - $(A \cup B^c) \cap C$
 - $A \Delta (B \cup C)$
 - $A \cup (B \Delta C)$
- Encontrar fórmulas que describan las partes rayadas de los siguientes diagramas de Venn, utilizando únicamente intersecciones, uniones y complementos.
 - 
 - 
 - 
- Hallar el conjunto $\mathcal{P}(A)$ de partes de A en los casos
 - $A = \{1\}$
 - $A = \{a, b\}$
 - $A = \{1, \{1, 2\}, 3\}$
- Sean A y B conjuntos. Probar que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \Leftrightarrow A \subseteq B$.

10. Sean p, q proposiciones. Verificar que las siguientes expresiones tienen la misma tabla de verdad para concluir que son equivalentes:

$$i) p \Rightarrow q, \quad \sim q \Rightarrow \sim p, \quad \sim p \vee q \quad \text{y} \quad \sim(p \wedge \sim q).$$

Cuando para probar $p \Rightarrow q$ se prueba en su lugar $\sim q \Rightarrow \sim p$ se dice que es una *demonstración por contrarrecíproco*, mientras que cuando se prueba en su lugar que suponer que vale $p \wedge \sim q$ lleva a una contradicción, se dice que es una *demonstración por reducción al absurdo*.

$$ii) \sim(p \Rightarrow q) \quad \text{y} \quad p \wedge \sim q.$$

11. Hallar contraejemplos para mostrar que las siguientes proposiciones son falsas:

$$i) \forall a \in \mathbb{N}, \frac{a-1}{a} \text{ no es un número entero.}$$

$$ii) \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ con } x, y \text{ positivos, } \sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

$$iii) \forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 4 \Rightarrow x > 2.$$

12. i) Decidir si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, justificando debidamente:

$$(a) \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5 \vee n \leq 8.$$

$$(e) \forall x \in \mathbb{R}, x > 3 \Rightarrow x^2 > 4.$$

$$(b) \exists n \in \mathbb{N} / n \geq 5 \wedge n \leq 8.$$

$$(c) \forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} / m > n.$$

$$(f) \text{ Si } z \text{ es un número real, entonces } z \text{ es un número complejo.}$$

$$(d) \exists n \in \mathbb{N} / \forall m \in \mathbb{N}, m > n.$$

ii) Negar las proposiciones anteriores, y en cada caso verificar que la proposición negada tiene el valor de verdad opuesto al de la original.

iii) Reescribir las proposiciones *e)* y *f)* del ítem *i)* utilizando las equivalencias del ejercicio *10i)*.

13. Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas cualesquiera sean los subconjuntos A, B y C de un conjunto referencial V y cuáles no. Para las que sean verdaderas, dar una demostración, para las otras dar un contraejemplo.

$$i) (A \Delta B) - C = (A - C) \Delta (B - C)$$

$$iii) C \subseteq A \Rightarrow B \cap C \subseteq (A \Delta B)^c$$

$$ii) (A \cap B) \Delta C = (A \Delta C) \cap (B \Delta C)$$

$$iv) A \Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$$

14. Sean A, B y C subconjuntos de un conjunto referencial V . Probar que

$$i) A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$$

$$v) A \subseteq B \Rightarrow A \Delta B = B \cap A^c$$

$$ii) A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$$

$$vi) A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$$

$$iii) A \Delta B \subseteq (A \Delta C) \cup (B \Delta C)$$

$$vii) A \cap C = \emptyset \Rightarrow A \cap (B \Delta C) = A \cap B$$

$$iv) (A \cap C) - B = (A - B) \cap C$$

15. Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Hallar $A \times A$, $A \times B$, $(A \cap B) \times (A \cup B)$.

16. Sean A, B y C conjuntos. Probar que

$$i) (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

$$iii) (A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$$

$$ii) (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$

$$iv) (A \Delta B) \times C = (A \times C) \Delta (B \times C)$$

Relaciones

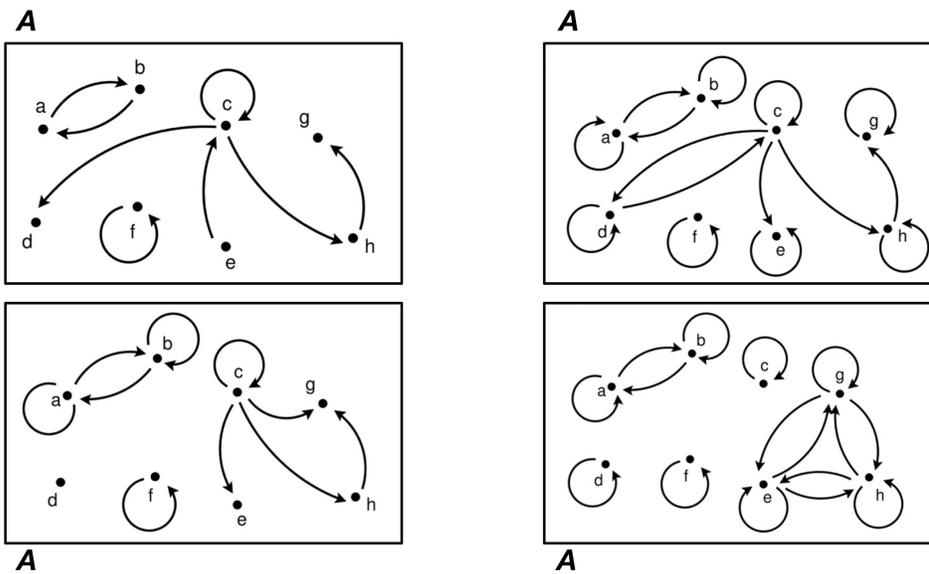
17. Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Verificar si las siguientes son relaciones de A en B y en caso afirmativo graficarlas por medio de un diagrama con flechas de A en B , y por medio de puntos en el producto cartesiano $A \times B$.

- i) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (1, 7), (3, 1), (3, 5)\}$
- ii) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (2, 7), (3, 2), (3, 5)\}$
- iii) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 7), (3, 7)\}$
- iv) $\mathcal{R} = \{(1, 3), (2, 1), (3, 7)\}$

18. Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Describir por extensión cada una de las relaciones siguientes de A en B :

- i) $(a, b) \in \mathcal{R} \iff a \leq b$
- ii) $(a, b) \in \mathcal{R} \iff a > b$
- iii) $(a, b) \in \mathcal{R} \iff a \cdot b$ es par
- iv) $(a, b) \in \mathcal{R} \iff a + b > 6$

19. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Para cada uno de los siguientes gráficos describir por extensión la relación en A que representa y determinar si es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

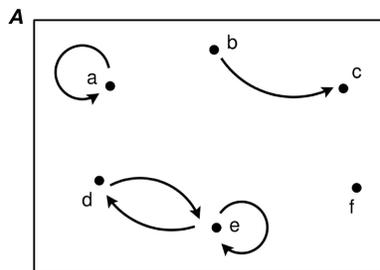


20. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Graficar la relación

$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3), (6, 4), (4, 6), (4, 4), (6, 6)\}$$

como está hecho en el ejercicio anterior y determinar si es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

21. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ y sea \mathcal{R} la relación en A representada por el gráfico



Hallar la mínima cantidad de pares que se deben agregar a \mathcal{R} de manera que la nueva relación obtenida sea

- i) reflexiva,
- ii) simétrica,
- iii) transitiva,
- iv) reflexiva y simétrica,
- v) simétrica y transitiva,
- vi) de equivalencia.

22. En cada uno de los siguientes casos determinar si la relación \mathcal{R} en A es reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva, de equivalencia o de orden.

- i) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (1, 3), (2, 5), (1, 5)\}$
- ii) $A = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / a + b \text{ es par}\}$
- iii) $A = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / |a| \leq |b|\}$
- iv) $A = \mathbb{Z}$, \mathcal{R} definida por $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow b$ es múltiplo de a
- v) $A = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, \mathcal{R} definida por $X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow X \cap \{1, 2, 3\} \subseteq Y \cap \{1, 2, 3\}$
- vi) $A = \mathcal{P}(\{n \in \mathbb{N} / n \leq 30\})$, \mathcal{R} definida por $X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow 2 \notin X \cap Y^c$
- vii) $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, \mathcal{R} definida por $(a, b) \mathcal{R} (c, d) \Leftrightarrow bc$ es múltiplo de ad .

23. Sea A un conjunto. Describir todas las relaciones en A que son a la vez

- i) simétricas y antisimétricas
- ii) de equivalencia y de orden

¿Puede una relación en A no ser ni simétrica ni antisimétrica?

24. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Dada la relación de equivalencia en A :

$$\mathcal{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f), (a, b), (b, a), (a, f), (f, a), (b, f), (f, b), (c, e), (e, c)\}$$

hallar la clase \bar{a} de a , la clase \bar{b} de b , la clase \bar{c} de c , la clase \bar{d} de d , y la partición asociada a \mathcal{R} .

25. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Hallar y graficar la relación de equivalencia en A asociada a la partición $\{\{1, 3\}, \{2, 6, 7\}, \{4, 8, 9, 10\}, \{5\}\}$. ¿Cuántas clases de equivalencia distintas tiene? Hallar un representante para cada clase.

26. Sean $P = \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\})$ el conjunto de partes de $\{1, \dots, 10\}$ y \mathcal{R} la relación en P definida por

$$A \mathcal{R} B \iff (A \Delta B) \cap \{1, 2, 3\} = \emptyset$$

- i) Probar que \mathcal{R} es una relación de equivalencia y decidir si es antisimétrica (*Sugerencia:* usar adecuadamente el ejercicio 14iii).
- ii) Hallar la clase de equivalencia de $A = \{1, 2, 3\}$.

27. Sean $A = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 92\}$ y \mathcal{R} la relación en A definida por

$$x \mathcal{R} y \iff x^2 - y^2 = 93x - 93y$$

- i) Probar que \mathcal{R} es una relación de equivalencia ¿Es antisimétrica?
 - ii) Hallar la clase de equivalencia de cada $x \in A$. Deducir cuántas clases de equivalencia **distintas** determina la relación \mathcal{R} .
28. i) Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Consideremos en $\mathcal{P}(A)$ la relación de equivalencia dada por el cardinal (es decir, la cantidad de elementos): dos subconjuntos de A están relacionados si y solo si tienen la misma cantidad de elementos ¿Cuántas clases de equivalencia **distintas** determina la relación? Hallar un representante para cada clase.
- ii) En el conjunto de todos los subconjuntos finitos de \mathbb{N} , consideremos nuevamente la relación de equivalencia dada por el cardinal: dos subconjuntos finitos de \mathbb{N} están relacionados si y solo si tienen la misma cantidad de elementos ¿Cuántas clases de equivalencia **distintas** determina la relación? Hallar un representante para cada clase.

Funciones

29. Determinar si \mathcal{R} es una función de A en B en los casos

- i) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, b), (5, c), (3, d)\}$
- ii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, d), (4, b)\}$
- iii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, d), (4, b), (5, c)\}$

- iv) $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{R}, \mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} / a = 2b - 3\}$
 v) $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{N}, \mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} / a = 2b - 3\}$
 vi) $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{Z}, \mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / a + b \text{ es divisible por } 5\}$

30. Determinar si las siguientes funciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas. Para las que sean biyectivas hallar la inversa y para las que no sean sobreyectivas hallar la imagen.

- i) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 12x^2 - 5$
 ii) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x + y$
 iii) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (x + y, 2z)$
 iv) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ n + 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$
 v) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(a, b) = 3a - 2b$
 vi) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, f(a) = \begin{cases} 2a & \text{si } a > 0 \\ 1 - 2a & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$

31. i) Dadas las funciones

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = \begin{cases} \frac{n^2}{2} & \text{si } n \text{ es divisible por } 6 \\ 3n + 1 & \text{en los otros casos} \end{cases} \quad \text{y} \quad g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, g(n, m) = n(m + 1),$$

calcular, de ser posible, $(f \circ g)(3, 4)$, $(f \circ g)(2, 5)$ y $(f \circ g)(3, 2)$.

ii) Dadas las funciones

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 7 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 7 \end{cases} \quad \text{y} \quad g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, g(n) = \sqrt{n},$$

hallar, si existen, todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $(f \circ g)(n) = 13$ y todos los $m \in \mathbb{N}$ tales que $(f \circ g)(m) = 15$.

32. Hallar $f \circ g$ y $g \circ f$ (cuando sea posible) en los casos

- i) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - 18$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x + 3$
 ii) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = \begin{cases} n - 2 & \text{si } n \text{ es divisible por } 4 \\ n + 1 & \text{si } n \text{ no es divisible por } 4 \end{cases}$ y $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, g(n) = 4n$
 iii) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(x) = (x + 5, 3x)$ y $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, g(n) = \sqrt{n}$

33. Hallar dos funciones $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tales que $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{N}}$ y $g \circ f \neq \text{id}_{\mathbb{N}}$, donde $\text{id}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ denota la función identidad del conjunto \mathbb{N} .

34. Sean A, B y C conjuntos. Probar que si $f : B \rightarrow C$ y $g : A \rightarrow B$ son funciones entonces valen

- i) si $f \circ g$ es inyectiva entonces g es inyectiva.
 ii) si $f \circ g$ es sobreyectiva entonces f es sobreyectiva
 iii) si f y g son inyectivas entonces $f \circ g$ es inyectiva
 iv) si f y g son sobreyectivas entonces $f \circ g$ es sobreyectiva
 v) si f y g son biyectivas entonces $f \circ g$ es biyectiva

35. Sea $\mathcal{F} = \{f : \{1, \dots, 10\} \rightarrow \{1, \dots, 10\} / f \text{ es una función biyectiva}\}$, y sea \mathcal{R} la relación en \mathcal{F} definida por

$$f \mathcal{R} g \iff \exists n \in \{1, \dots, 10\} / f(n) = 1 \text{ y } g(n) = 1$$

- i) Probar que \mathcal{R} es una relación de equivalencia ¿Es antisimétrica?
 ii) Sea $\text{Id} : \{1, \dots, 10\} \rightarrow \{1, \dots, 10\}$ la función identidad, o sea, $\text{Id}(n) = n, \forall n \in \{1, \dots, 10\}$. Dar tres elementos **distintos** de la clase de equivalencia de Id .

Importante: al exhibir una función es indispensable definirla en **todos** los elementos de su dominio.

36. Sea $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ una función. Consideremos el conjunto de **todas** las funciones de $\{1, 2, 3, 4\}$ en $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, es decir,

$$\mathcal{F} = \left\{ g : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \right\}$$

y definimos sobre \mathcal{F} la relación dada por

$$g \mathcal{R} h \iff g \circ f = h \circ f$$

- i) Probar que \mathcal{R} es una relación de equivalencia ¿Es siempre antisimétrica (sin importar cómo sea f)?
- ii) Asumiendo que f es sobreyectiva, calcular la clase de equivalencia de cada $g \in \mathcal{F}$.