Álgebra III

Práctica 7 – Segundo Cuatrimestre de 2023

Extensiones trascendentes y Álgebra conmutativa

Ejercicio 1. Sea K un cuerpo y sean α algebraico sobre K y t trascendente sobre K. Pruebe que $\mathrm{m}(\alpha, K) = \mathrm{m}(\alpha, K(t))$ y deduzca que $[K[\alpha] : K] = [K(t)[\alpha] : K(t)]$.

Ejercicio 2. Sean L_1 y L_2 dos subextensiones de E/K. Pruebe que:

$$\mathrm{trdeg}(L_1L_2/K) \leqslant \mathrm{trdeg}(L_1/K) + \mathrm{trdeg}(L_2/K).$$

Dé un ejemplo donde no valga la igualdad.

Ejercicio 3. Sea E un cuerpo algebraicamente cerrado y sea K un subcuerpo. Sea $\varphi : E \to E$ un K-morfismo. Pruebe que si $\mathrm{trdeg}(E/K) < \infty$, entonces φ es un isomorfismo. Muestre que esto no necesariamente es cierto si el grado de trascendencia es infinito. ¿Qué sucede si E no es algebraicamente cerrado?

Ejercicio 4. Pruebe que $\mathbb{C}$ tiene infinitos subcuerpos propios que son isomorfos a $\mathbb{C}$.

Ejercicio 5. Pruebe que $\mathbb{C}$ tiene subcuerpos isomorfos a $\mathbb{Q}_p$ para todo p primo.
Sugerencia: piense en términos de cardinalidad.

Ejercicio 6. Sea t trascendente sobre $\mathbb{C}$ y sea K la clausura algebraica de $\mathbb{C}(t)$. Pruebe que $K \cong \mathbb{C}$.

Ejercicio 7. Sean $A \subseteq B$ dominios y $S \subseteq A$ un conjunto multiplicativamente cerrado. Sea C la clausura entera de A en B.

a) Pruebe que $S^{-1}C$ es entero sobre $S^{-1}A$.

b) Pruebe que $S^{-1}C$ es la clausura entera de $S^{-1}A$ en $S^{-1}B$.

Ejercicio 8. Sea k un cuerpo y B una k-álgebra finitamente generada. El objetivo de este ejercicio es probar por inducción el *Lema de Zariski*: si B es un cuerpo, entonces la extensión B/k es algebraica.

a) Suponga que $x_1, \dots, x_n$ generan B como k-álgebra. Si $n = 1$, deduzca el resultado.

b) Suponga ahora que $n > 1$. Sean $A = k[x_1]$ y $K = k(x_1)$ su cuerpo de fracciones. Por hipótesis inductiva, B es una extensión algebraica finita de K. Considere α como el producto de los denominadores de todos los coeficientes de los polinomios minimales $\mathrm{m}(x_i, K)$ para $2 \leq i \leq n$ (observe que $\alpha \in A$). Definimos el conjunto multiplicativamente cerrado $S = \{\alpha^n : n \geq 0\}$. Pruebe que x_i es entero sobre $C = S^{-1}A$ para $2 \leq i \leq n$. Deduzca que B y K son enteros sobre $S^{-1}A$.

c) Suponga que x_1 es trascendente sobre k. Pruebe que C sería íntegramente cerrado, y por lo tanto $C = K$, lo cual es absurdo.

Ejercicio 9. *(Nullstellensatz débil)* Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado. Si I es un ideal propio de $K[X_1, \ldots, X_n]$, entonces existe $x \in K^n$ tal que $f(x) = 0$ para todo $f \in I$.
Sugerencia: se puede suponer que I es un ideal maximal. Considere la aplicación cociente $K[X_1, \ldots, X_n] \to K[X_1, \ldots, X_n]/I$. Use el Lema de Zariski convenientemente.

Ejercicio 10. Sea E un cuerpo finitamente generado como $\mathbb{Z}-$álgebra. Pruebe que E es un cuerpo finito.

$*$ **Ejercicio 11.** Sean L un conjunto infinito de primos y $A = \prod_{p \in L} \mathbb{F}_p$. Pruebe que existe un cociente de A que es isomorfo a un subcuerpo de $\mathbb{C}$.
Sugerencia: considere el ideal $I = \bigoplus_{p \in L} \mathbb{F}_p$.

Ejercicio 12. Sea R un anillo, y sean I, J ideales de R. Pruebe que

a) Si $I \subseteq J$, entonces $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$.

b) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.

c) $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.

d) Si I es primo, entonces $I = \sqrt{I}$.

Ejercicio 13. Sea R un DFU. Sea $f \in R$ y sea $I = (f)$. Supongamos que $f = q_1^{\alpha_1} \cdots q_r^{\alpha_r}$ con los q_i irreducibles distintos dos a dos. Pruebe que $\sqrt{I} = f_{red} := q_1 \cdots q_r$.

Ejercicio 14. Sea $E = \mathbb{C}(X)[Y]/(f(X,Y))$, donde $f(X,Y) = Y^2 - (X-a)(X-b)(X-c)$ con $a, b, c \in \mathbb{C}$. Pruebe que tanto $\{X\}$ como $\{Y\}$ son bases de trascendencia de $E/\mathbb{C}$.

Ejercicio 15. Para $R = \mathbb{C}[X,Y]/(Y^2 - X^3)$ y $R = \mathbb{C}[X,Y]/(Y^2 - X^2(X-1))$, pruebe que R es un dominio íntegro y que si $K = \mathrm{Frac}(R)$, entonces el elemento $t := \frac{\bar{x}}{\bar{y}} \in K$ es tal que $K = \mathbb{C}(t)$ y $\mathbb{C}[t]$ es la clausura entera de R en K.

Ejercicio 16. Halle el subanillo de $\mathbb{F}_q[x]$ fijo por

a) $x \mapsto ax$ para todo $a \in \mathbb{F}_q^\times$.

b) $x \mapsto x + b$ para todo $b \in \mathbb{F}_q$.

c) $x \mapsto ax + b$ para todo $(a, b) \in \mathbb{F}_q^\times \times \mathbb{F}_q$.

Ejercicio 17. Halle el subcuerpo de $\mathbb{Q}(z)$ fijo por el grupo generado por $z \mapsto z^{-1}$ y $z \mapsto (z+1)/(1-z)$. ¿Existe un cambio de coordenadas que lo convierte en un ejemplo dado en clase?

Ejercicio 18. ¿Cuáles de las siguientes extensiones son puramente trascendentes? Exhiba un generador en caso de que lo sean.

a) $K\left(t, \sqrt{1-t^2}\right)/K$.

b) $\mathbb{Q}\left(t, \sqrt{3-t^2}\right)/\mathbb{Q}$.

c) $K\left(t, \sqrt{t^3-t}\right)/K$.

d) $K\left(t, \sqrt[n]{1-t^n}\right)/K$, con $n \geq 3$.