Matemática II (B)

Teórica Turno Noche

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Universidad de Buenos Aires

Segundo Cuatrimestre 2022

Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

OBJETIVO: **Buscar soluciones de sistemas lineales de** 2×2 **con coeficientes constantes**.

Comenzamos por el caso homogéneo: Buscar soluciones del sistema

$$X' = AX,$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz constante. Si planteamos como solución $X(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. obtenemos que

$$X' = AX \text{ si y sólo si } A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

y como para tener solución no trivial queremos que $\mathbf{v} \neq 0$ concluimos que

$$X(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$$

es solución no trivial si y sólo si λ *es autovalor de* A *y* $\mathbf{v}$ *es un autovector asociado al autovalor* λ*.*

En 2×2 podemos tener los siguientes casos que vamos a analizar:

- **Caso 1:** A tiene dos autovalores reales y distintos.
- **Caso 2:** A tiene un solo autovalor y hay base de autovectores.
- **Caso 3:** A tiene un solo autovalor y No hay base de autovectores.
- **Caso 4:** A tiene autovalores complejos y como es real son λ y $\bar{\lambda}$

Caso 1: A tiene dos autovalores reales y distintos.

Tenemos autopares $(\lambda_1, \mathbf{v}_1)$ y $(\lambda_2, \mathbf{v}_2)$ con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y por ende $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ linealmente independientes.

Base de soluciones: $\{X_1(t) = e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1, X_2(t) = e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2\}$

OBS. $X_1(t)$ y $X_2(t)$ son linealmente independientes pues $X_1(0) = \mathbf{v}_1$ y $X_2(0) = \mathbf{v}_2$ son linealmente independientes

Solución general:

$$X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Caso 2: A tiene un único autovalor λ y hay base de autovectores.

En este caso debe ser $A = \lambda I$, i.e., un sistema desacoplado

$$\begin{cases} x_1'(t) = \lambda x_1(t) \\ x_2'(t) = \lambda x_2(t) \end{cases}$$

Base de soluciones $\{X_1(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

Solución general:

$$X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Caso 3: A tiene un único autovalor λ y No hay base de autovectores.

En este caso tendremos la **Base de Soluciones**:

$$\{X_1(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}, X_2(t) = te^{\lambda t}\mathbf{v} + \mathbf{w}e^{\lambda t}\}$$

con $\mathbf{w}$ una solución del sistema $(A - \lambda I)\mathbf{w} = \mathbf{v}$.

Solución general:

$$X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Caso 4: A tiene autovalores complejos λ y $\bar{\lambda}$

$$\lambda = \alpha + \beta i, \quad \bar{\lambda} = \alpha - \beta i$$

Fórmula de Euler: $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}\,(\theta)$.

$$g(t) = e^{\lambda t} = e^{(\alpha+\beta i)t} = e^{\alpha t}e^{i\beta t} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\,\mathrm{sen}\,(\beta t))$$

$$g'(t) = \alpha e^{\alpha t}e^{i\beta t} + i\beta e^{\alpha t}e^{i\beta t} = (\alpha + i\beta)e^{\alpha t}e^{i\beta t} = \lambda e^{\lambda t}$$

Si consideramos los autopares complejos $(\lambda, \mathbf{v})$ y $(\bar{\lambda}, \bar{\mathbf{v}})$ tendremos

$$Z_1(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v} \quad \text{y} \quad Z_2(t) = e^{\bar{\lambda} t}\bar{\mathbf{v}}$$

soluciones linealmente independientes pero en $\mathbb{C}$ y queremos soluciones en $\mathbb{R}$.

Notemos que

$$Z_1(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v} \quad \text{y} \quad Z_2(t) = \bar{Z}_1(t)$$

y como toda combinación de soluciones es solución podemos tomar

$$\frac{Z_1(t) + Z_2(t)}{2} = \mathrm{Re}(Z_1) \quad \text{y} \quad \frac{Z_1(t) - Z_2(t)}{2i} = \mathrm{Im}(Z_1)$$

Base de soluciones

$$\{X_1(t) = \frac{\mathbf{v}(t)e^{\lambda t} + \bar{\mathbf{v}}(t)e^{\bar{\lambda} t}}{2}, X_2(t) = \frac{\mathbf{v}(t)e^{\lambda t} - \bar{\mathbf{v}}(t)e^{\bar{\lambda} t}}{2i}\}$$

Solución general:

$$X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

EJEMPLO:

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) - y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) \end{cases}$$

Aqui $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ cuyos autovalores es $\lambda = i$ y $\bar{\lambda} = -i$.

Obtenemos $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix}$ y

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \cos(t) - \operatorname{sen}(t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(t) \\ \cos(t) + \operatorname{sen}(t) \end{pmatrix}$$

Base de Soluciones en $\mathbb{R}$ es:

$$\{ \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \cos(t) - \operatorname{sen}(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(t) \\ \cos(t) + \operatorname{sen}(t) \end{pmatrix} \}$$

Consideramos ahora el sistema no-homogeneao

$$X'(t) = A(t)X(t) + b(t)$$

con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ con $a_{ij} : I \to \mathbb{R}$ y $b_i : I \to R$ continuas. Tenemos el siguiente Teorema

Teorema

La solución general del sistema $X'(t) = A(t)X(t) + b(t)$ es de la forma

$$X(t) = X_H(t) + X_p(t)$$

donde X_H es la solución general del sistema homogeneo asociado $X'(t) = A(t)X(t)$ y X_p es una solución particular del no homogeneo (o sea $X_p'(t) = A(t)X_p(t) + b(t)$)

OBS. En el caso particular de $A(t) \equiv A$ matriz constante, sabemos hallar soluciones del homogeneo. Si pudieramos hallar una X_p tendriamos la solución general del No-homogeneo.

¿Como podemos hacer entonces para encontrar una solución particular X_p del No-homogeneo?

Método de variación de las constantes

Teorema

Sea $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *continua en un intervalo abierto* I*. Sea* $\{X_1, \cdots, X_n\}$ *una base del conjunto de soluciones del sistema homogéneo. Sea* $b(t) \in \mathbb{R}^n$ *continuo en* I*. Existen funciones* $c_1(t), \cdots, c_n(t)$ *continuamente diferenciables en* I *tales que*

$$X_p(t) = c_1(t)X_1(t) + \cdots + c_n(t)X_n(t)$$

es una solución particular del sistema $X'(t) = A(t)X(t) + b(t)$*. Más precisamente, las funciones* $c_i(t)$ *son primitivas de las soluciones* $c_i'(t)$ *del sistema lineal* $Q(t)\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = b(t)$*,*
donde $Q(t)$ *es la matriz fundamental, i.e., está formada por los vectores* $X_j(t)$ *puestos como columnas.*

OBS. Notemos que al integrar uno tiene constantes de integración arbitrarias. Podemos simplemente tomarlas igual a 0 para obtener una solución particular.

Si las dejamos en la expresión de las funciones $c_i(t)$ obtenemos directamente la solución general del sistema no homogéneo ya que el término adicional que obtenemos es la solución general del sistema homogéneo asociado.

EJEMPLO:

$$\begin{cases} x'(t) = -2x(t) - 4y(t) + 1 + 4t \\ y'(t) = y(t) - x(t) + \dfrac{3}{2}t^2 \end{cases}$$

Aqui

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 4t+1 \\ \frac{3}{2}t^2 \end{pmatrix}$$

Resolvemos y hallamos la solución general del No-homogeneo

$$X_{NH} = \overbrace{c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}}^{\text{solución del homogeneo}} + \overbrace{\begin{pmatrix} t^2+t \\ -\frac{t^2}{2} \end{pmatrix}}^{\text{solución particular}}$$

A partir de saber resolver sistemas de 2×2 también sabemos resolver ecuaciones de orden 2.
Dada la ecuación con coeficientes constantes

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t)$$

Haciendo el cambio de variables $y_0(t) = x(t)$ e $y_1(t) = x'(t)$ resulta $y_0' = y_1$ y $y_1' = -a_1 y_1 - a_0 y_0 + f$, i.e., el sistema

$$Y'(t) = A(t)Y(t) + b(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} Y(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Cuya solución general es de la forma $Y_{NH} = Y_H + Y_p$
La solución que buscamos está en la primer componente de Y, o sea $x(t) = y_0(t)$.

EJEMPLO: Usando lo visto para sistemas resolver

$$x''(t) + 4x(t) = 0$$

$$Y'(t) = A(t)Y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} Y(t)$$

Resolvemos $\rightarrow$ hallamos Y y usando que $y_0 = x$ resulta

Solución general

$$x(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \mathrm{sen}\,(2t)$$