Ejemplos: Matrices diagonalizables y no tanto

Ejemplo 1: Diagonalizar (si es posible)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Paso 1: Calcular autovalores.

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & 4 \\ -1 & -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda)(-3-\lambda) - 6 - \Big(-(2-\lambda) + 2(-3-\lambda) - 4(1-\lambda) \Big) =$$

$$-\lambda^3 + 4\lambda = \lambda(-\lambda^2 + 4) = 0.$$

Luego, los autovalores de A son $0, 2$ y -2.

Ejemplo 1: Diagonalizar (si es posible)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

<u>Paso 2: Calcular autovectores asociados a los autovalores.</u>

Respecto a $\lambda_1 = 0$

$$(A - 0I)x = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(2F_1-F_2)_2]{(F_1+F_3)_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{cc} x + y + z & = 0 \\ -2z & = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{c} z = 0 \\ x = -y \end{array} .$$

Solución del sistema:$\{\alpha(1, -1, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Un autovector de A asociado a $\lambda = 0$ es $(1, -1, 0)$.

Ejemplo 1: Diagonalizar (si es posible)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

<u>Paso 2: Calcular autovectores asociados a los autovalores.</u>

Respecto a $\lambda_2 = 2$

$$(A-2I)x = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(2F_1+F_2)_2]{(F_1-F_3)_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rl} -x+y+z & = 0 \\ 2y+6z & = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} x = -2z \\ y = -3z \end{array}.$$

Solución del sistema:$\{\alpha(-2,-3,1) \colon \alpha \in \mathbb{R}\}$. Un autovector de A asociado a $\lambda = 2$ es $(-2,-3,1)$.

Ejemplo 1: Diagonalizar (si es posible)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Paso 2: Calcular autovectores asociados a los autovalores.

Respecto a $\lambda_3 = -2$

$$(A-(-2)I)x = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(2F_1-3F_2)_2]{(F_1+3F_3)_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & -10 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 3x+y+z & =0 \\ -2y-2z & =0 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{c} y=-z \\ x=0 \end{array}.$$

Solución del sistema:$\{\alpha(0,-1,1) \colon \alpha \in \mathbb{R}\}$. Un autovector de A asociado a $\lambda = -2$ es $(0,-1,1)$.

Ejemplo 1: Diagonalizar (si es posible)

Paso 3: Concluir Sabemos que A tiene:

Autovalores	Autovector asociado
$\lambda_1 = 0$	$(1, -1, 0)$
$\lambda_2 = 2$	$(-2, -3, 1)$
$\lambda_3 = -2$	$(0, -1, 1)$

Entonces $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Y tenemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1: Diagonalizar (si es posible)

Paso 3: Concluir Notar que Sabemos que A tiene:

Autovalores	Autovector asociado
$\lambda_1 = 0$	$(2, -2, 0)$
$\lambda_2 = 2$	$(2, 3, -1)$
$\lambda_3 = -2$	$(0, -1, 1)$

Entonces $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Y tenemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2: Diagonalizar (si es posible) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Paso 1: Calcular autovalores.

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(1-\lambda) = 0.$$

Los autovalores son $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$.

Ejemplo 2: Diagonalizar (si es posible) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Paso 2: Calcular autovectores asociados a los autovalores.

Respecto a $\lambda_1 = 1$

$$(A - I)x = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(2F_1+F_2)_2]{(F_2-F_3)_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x - y + z & = 0 \\ z & = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} y = x \\ z = 0 \end{array}.$$

Solución del sistema:$\{\alpha(1,1,0) \colon \alpha \in \mathbb{R}\}$. Un autovector de A asociado a $\lambda = 1$ es $(1,1,0)$.

Ejemplo 2: Diagonalizar (si es posible) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Paso 2: Calcular autovectores asociados a los autovalores.

Respecto a $\lambda_2 = 2$

$$(A - 2I)x = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(F_1 - F_2)_2]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \; -y + z \;\; = 0 \;\; \Rightarrow \;\; y = z \; . \right.$$

Solución del sistema: $\{\alpha(0,1,1) + \beta(1,0,0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Un autovector de A asociado a $\lambda = 2$ es $(0,1,1)$, otro puede ser $(1,0,0)$.

Ejemplo 2: Diagonalizar (si es posible)

Paso 3: Concluir Sabemos que A tiene:

Autovalores	Autovector asociado
$\lambda_1 = 1$	$(1,1,0)$
$\lambda_2 = 2$	$(1,0,0)$
$\lambda_3 = 2$	$(0,1,1)$

Entonces $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Y tenemos que

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3: Diagonalizar (si es posible)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Paso 1: Calcular autovalores.

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)(3-\lambda)(3-\lambda) + 2 - \Big(2(3-\lambda) - (2-\lambda)\Big) =$$

$$-\lambda^3 + 8\lambda^2 + 22\lambda + 16 = (\lambda-4)(-\lambda^2 + 4\lambda - 4) = (4-\lambda)(2-\lambda)^2 = 0.$$

Los autovalores son $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 2$.

Ejemplo 3: Diagonalizar (si es posible)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>Paso 2: Calcular autovectores asociados a los autovalores.</u>

Respecto a $\lambda_1 = 2$

$$(A-2I)x = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(F_1-F_2)_2]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rl} -y+z & = 0 \\ 2x+y+z & = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{c} y = z \\ -x = y \end{array}.$$

Solución del sistema:$\{\alpha(-1,1,1) \colon \alpha \in \mathbb{R}\}$. Un autovector de A asociado a $\lambda = 2$ es $(-1,1,1)$.

Ejemplo 3: Diagonalizar (si es posible)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>Paso 2: Calcular autovectores asociados a los autovalores.</u>

Respecto a $\lambda_2 = 4$

$$(A-4I)x = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(F_1+F_3)_3]{}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rl} -2x - y + z & = 0 \\ -y - z & = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{c} y = -z \\ x = z \end{array}.$$

Solución del sistema:$\{\alpha(1,-1,1) \colon \alpha \in \mathbb{R}\}$. Un autovector de A asociado a $\lambda = 4$ es $(1,-1,1)$.

Ejemplo 3: Diagonalizar (si es posible)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>Paso 3: Concluir</u> Sabemos que A tiene:

Autovalores	Autovector asociado
$\lambda_1 = 2$	$(-1, 1, 1)$
$\lambda_2 = 2$	$(-1, 1, 1)$
$\lambda_3 = 4$	$(1, -1, 1)$

Sólo puedo elegir 2 autovectores que no sean uno multiplo del otro. **La matriz no es diagonalizable**

Ejemplo 4: Diagonalizar (si es posible) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

<u>Paso 1: Calcular autovalores</u>

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)+5 = \lambda^2+4 = 0$$

En $\mathbb{R}$ no hay raíces $\Rightarrow$ no hay autovalores en $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ no es diagonalizable en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 4: Diagonalizar (si es posible) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

Paso 1: Calcular autovalores

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)+5 = \lambda^2+4 = 0$$

En $\mathbb{C}$, las raíces son $2i$ y $-2i$ $\Rightarrow$ son autovalores.

Ejemplo 4: Diagonalizar (si es posible) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

Paso 2: Calcular autovectores asociados a autovalores Respecto a $\lambda = 2i$

$$\begin{pmatrix} 1-2i & -1 \\ 5 & -1-2i \end{pmatrix} x = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1-2i & -1 & 0 \\ 5 & -1-2i & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\overset{(1+2i)F_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -1-2i & 0 \\ 5 & -1-2i & 0 \end{array}\right) \overset{(F_1-F2)_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -1-2i & 0 \\ & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Solución del sistema $(A-2i)x = 0 \Rightarrow \{\alpha(\frac{1+2i}{5}, 1)\colon \alpha \in \mathbb{C}\}$.

Ejemplo 4: Diagonalizar (si es posible) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

<u>Paso 2: Calcular autovectores asociados a autovalores</u> Un autovector asociado a $\lambda = 2i$ es $(\frac{1+2i}{5}, 1)$.
Como $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, un autovector asociado a $\lambda = -2i$ es $(\frac{1-2i}{5}, 1)$.

Ejemplo 4: Diagonalizar (si es posible) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

Paso 3: Concluir Sabemos que A tiene

Autovalores	Autovector asociado
$\lambda_1 = 2i$	$(\frac{1+2i}{5}, 1)$
$\lambda_2 = -2i$	$(\frac{1-2i}{5}, 1)$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1+2i}{5} & \frac{1-2i}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}$$

Y tenemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+2i}{5} & \frac{1-2i}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{5}{4}i & \frac{1}{2} + \frac{1}{4}i \\ \frac{5}{4}i & \frac{1}{2} - \frac{1}{4}i \end{pmatrix}$$

y A es diagonalizable en $\mathbb{C}$.

Teorema

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz es diagonalizable si y sólo si existen n autovectores $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ asociados a autovalores λ (no necesariamente distintos) tales que la matriz

$$P = \left(\begin{array}{c|c|c|c} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{array} \right) \quad \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

es inversible.

Proposición

Una matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es diagonalizable si la multiplicidad de cada autovalor λ como raíz de su polinomio característico coincide

- Con la mínima cantidad de generadores del autoespacio asociado a ese autovalor.
- que es lo mismo que la cantidad de filas que se anulan de $(A - \lambda I)$.
- que es lo mismo que $n - \mathrm{rg}(A - \lambda I)$.

Resultados

- Si una matriz tiene todos sus autovalores diferentes es diagonalizable.
- Toda matriz simétrica es diagonalizable.
- Hay matrices no diagonalizabes en $\mathbb{R}$ pero si en $\mathbb{C}$.
- Si la matriz tiene coeficientes en $\mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ es autovalor con autovector asociado v, entonces $\overline{\lambda}$ es autovalor con autovector asociado $\overline{v}$.
- Una matriz es no inversible si y sólo si 0 es autovalor.
- Si una matriz es inversible y λ es autovalor asociado a v, entonces λ^{-1} es autovalor de la inversa y tiene autovector asociado v.